Base & dimension d'un espace vectoriel

1) Systèmes de générateurs :

Une famille finie $F = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite génératrice si $E = \langle e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n \rangle$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de F.

Exemple :

Montrer que les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^3$ et exprimer le vecteur

$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs

$\Rightarrow$ Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$

Il faut montrer que x peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4, c-à-d qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 tels que :

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = z \end{cases}$$ où les inconnues sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4

Résolvons le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = z \end{cases} \underset{\Rightarrow}{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = y \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = -x + z \end{cases}$$

$$\underset{\Rightarrow}{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = y \\ -3\alpha_3 - 3\alpha_4 = -x - 2y + z \end{cases} \xrightarrow[L_2 \to 3L_2 + L_3]{L_1 \to 3L_1 + L_3}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_4 = 2x - 2y + z \\ 3\alpha_2 = -x + y + z \\ -3\alpha_3 - 3\alpha_4 = -x - 2y + z \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_4 = x - y + 2z \\ 3\alpha_2 = -x + y + z \\ -3\alpha_3 - 3\alpha_4 = -x - 2y + z \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{3}L_3}]{L_1 \to \frac{1}{3}L_1} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le système possède une variable libre α_4. En posant $\alpha_4 = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \alpha \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \alpha_3 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \alpha \\ \alpha_4 = \alpha \end{cases}$$

* Famille libre :

Une famille finie $F = (e_1 ; e_2 ; e_3 ; \cdots ; e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite libre si la seule combinaison linéaire des éléments de F qui donne le vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n = 0$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Les vecteurs d'une famille libre sont dits linéairement indépendants.

Les vecteurs d'une famille liée sont dits linéairement dépendants.

* combinaison linéaire :

$u \in E$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \cdots, u_n \in E$ s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}$$

On note $\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \cdots, u_n \in E$

* Théorème (sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires)

i) $\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E

ii) $\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $u_1, u_2, \cdots, u_n$: Tout sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, u_2, \cdots, u_n$ contient $\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$

$\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$ est appelé sous-espace engendré par $u_1, u_2, \cdots u_n$

! Attention à ne pas confondre les notations :

* Ensemble : $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

* n-uple ordonné : $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$

* sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires :

$$\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$$

* <u>Théorème : propriétés des familles liées</u>

- $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ liée $\Leftrightarrow$ $\exists\ 1 \leq k \leq n$ avec

$$u_k \in \langle u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots, u_n \rangle$$

- $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ liée $\Leftrightarrow$ $\exists\ 1 \leq k \leq n$ avec

$$\langle u_1, u_2, \cdots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots, u_n \rangle$$

* <u>Remarques :</u>

- Dans une famille libre, aucun vecteur n'est nul
- Une famille réduite à un seul vecteur non nul est libre
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Toute famille qui possède une sous-famille liée est liée
- Soient $u, v \in E$ vecteurs non nuls :

$$(u ; v) \text{ liée} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq : } u = \alpha v$$

2) Base :

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E si :

- $\mathcal{B}$ est une famille libre
- $\mathcal{B}$ est un système de générateurs : $E = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$

$\Rightarrow$ Une base d'un espace vectoriel est une famille génératrice et libre.

* Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base, alors l'équation :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_n u_n = u \iff u = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{\text{composantes de } u \text{ dans } \mathcal{B}}$$

possède exactement une solution.

- L'existence d'au moins une solution vient de ce que la famille est génératrice
- L'existence d'au plus une solution vient de ce que la famille est libre.

* Théorème 1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Si un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ possède une famille finie de générateurs $G = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, alors :

i) Il existe une base de E dont les éléments appartiennent à G

ii) Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

* Bases canoniques :

On considère les éléments $e_1 = (1;0;0;\cdots;0)$, $e_2 = (0;1;0;\cdots;0)$, $\cdots$, et $e_n = (0;0;0;\cdots;1)$, de façon évidente, c'est une famille à la fois libre et génératrice. On la appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

=) Exemple :

* La famille $e_1 = (1;0;0)$, $e_2 = (0;1;0)$ et $e_3 = (0;0;1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

* La famille $\{1, x, x^2\}$ forme une base de $\mathbb{P}_2$. Il s'agit même de la base canonique.

* Théorème de la base incomplète :

Toute famille libre $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E peut être étendue en une famille génératrice de E.

* Théorème de la base extraite :

Soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est une famille génératrice de E.
Cette famille $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ contient alors un sous-ensemble formant une base.

3) Dimension d'un espace vectoriel :

Un espace vectoriel E est dit de dimension n s'il admet une base formée de n éléments. On écrit :

$$\boxed{\dim(E) = n}$$

ou : le nombre de vecteurs formant une base de E s'appelle la dimension de E et noté $\dim(E)$

* Théorème 2 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

i) Si $G = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ est un système de générateurs de E, alors $m \geq n$

Si $m = n$, G est une base de E

ii) Si $F = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille libre de V, alors $p \leq n$ et il existe une base de V qui contient les éléments de F.

Si $p = n$, F est une base de E.

* Théorème 3 (Formule de Grassmann)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

* **Théorème 4 :**

Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée de manière à former une base.

4) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

* **Théorème :**

- L'intersection $A \cap B$ de deux sous-espaces vectoriels A et B est un sous-espace vectoriel.

! Attention : l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

* **Dimension de quelques espaces vectoriels :**

i) La base canonique $e_1 = (1;0;\cdots;0)$, $e_2 = (0;1;\cdots;0)$, $\cdots$, $e_n = (0;0;\cdots;1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ comporte n vecteurs. Cet espace est donc de dimension n.

ii) L'espace des matrices carrées M_n admet une base formée de n^2 vecteurs. Il est donc de dimension n^2.

iii) L'espace P_2 des polynômes de degré au plus égal à 2 est de dimension 3 car il admet $\{x^2, x, 1\}$ comme base.