Sphère

3MRf

3.7.6 On donne la sphère Σ et le point T. Après avoir vérifié que T appartient à Σ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à Σ au point T :

a) $\Sigma : (x+3)^2 + (y-15)^2 + (z-2)^2 = 225$ $\quad T(7; 4; 4)$,

b) $\Sigma : (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 289$ $\quad T(14; 4; -6)$,

c) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 6z = 27$ $\quad T(-2; 12; -5)$,

d) $\Sigma : 49x^2 + 49y^2 + 49z^2 + 42y + 34 = 70x + 294z$ $\quad T\left(3; -1; \frac{8}{7}\right)$.

a) $T \in \Sigma$? : $(7+3)^2 + (4-15)^2 + (4-2)^2 = 100 + 121 + 4 = 225$ ✓

$\Rightarrow T \in \Sigma$

$\Rightarrow C(-3; 15; 2) \Rightarrow \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 7+3 \\ 4-15 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ = vecteur normal

du plan π tangent à Σ.

$\Rightarrow (\pi) : 10x - 11y + 2z + d = 0$

$T \in (\pi) \Leftrightarrow 10 \cdot 7 - 11 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + d = 0$

$\Rightarrow 70 - 44 + 8 + d = 0 \Rightarrow d = -34$

$\Rightarrow \boxed{(\pi) : 10x - 11y + 2z - 34 = 0}$

b) $144 + 64 + 81 = 289$ ✓ $\rightarrow T \in \Sigma$ $\quad T(14; 4; -6)$; $C(2; -4; 3)$

Autre méthode :

On considère une sphère Σ de centre $C(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r et un point $T(x_1; y_1; z_1)$ situé sur la sphère.

$\Rightarrow$ Le plan tangent à la sphère de centre $C(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r au point $T(x_1; y_1; z_1)$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = r^2}$$

Dans notre cas :

$$(\pi) : \quad (14-2)(x-2) + (4-(-4))(y+4) + (-6-3)(z-3) = 289$$

$$12(x-2) + 8(y+4) - 9(z-3) = 289$$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi) : \quad 12x + 8y - 9z - 254 = 0}$$

c) $T(-2 ; 12 ; -5)$

$$(\Sigma) : \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 6z + 9 = 27 + 1 + 25 + 9$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 62$$

$$\Rightarrow 9 + 49 + 4 = 62 \checkmark \quad \Rightarrow T \in (\Sigma)$$

$$(\pi) : \quad -3(x-1) + 7(y-5) - 2(z+3) = 62$$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi) : \quad 3x - 7y + 2z + 100 = 0}$$

d) $T\left(3 ; -1 ; \frac{8}{7}\right)$

$$(\Sigma) : \quad x^2 - \frac{10x}{7} + \frac{25}{49} + y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{9}{49} + z^2 - 6z + 9 = -\frac{34}{49} + \frac{25}{49} + \frac{9}{49} + 9$$

$$\Rightarrow (\Sigma) : \quad \left(x - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{7}\right)^2 + (z-3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{256}{49} + \frac{16}{49} + \frac{169}{49} = 9 \checkmark \quad \Rightarrow T \in (\Sigma)$$

$$\Rightarrow (\pi) : \quad \frac{16}{7}\left(x - \frac{5}{7}\right) - \frac{4}{7}\left(y + \frac{3}{7}\right) - \frac{13}{7}(z-3) = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi) : \quad 112x - 28y - 91z - 260 = 0}$$

3.7.7 On donne la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2=216$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

La droite normale : $(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7k \\ y = -2k \\ z = -k \end{cases}$$

* $(n) \cap (\Sigma)$: $(7k)^2 + (-2k)^2 + (-k)^2 = 216$

$49k^2 + 4k^2 + k^2 = 216 \Leftrightarrow 54k^2 = 216$

$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

$\Rightarrow T_1(14; -4; -2)$ et $T_2(-14; 4; 2)$

* (π_1) : $7x - 2y - z + d_1 = 0$

$T_1 \in (\pi_1) \Rightarrow 98 + 8 + 2 + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -108$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi_1) : 7x - 2y - z - 108 = 0}$$

* (π_2) : $7x - 2y - z + d_2 = 0$

$T_2 \in (\pi_2) \Rightarrow -98 - 8 - 2 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 108$

$$\Rightarrow \boxed{(\pi_2) : 7x - 2y - z + 108 = 0}$$

3.7.8 On donne la sphère $\Sigma : (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = 169$ et le plan $\alpha : 12x+4y+3z-12 = 0$. Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles à α et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

$(\Sigma) : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169 \Rightarrow C(3;1;0) \; ; \; r = 13$

$(\alpha) : 12x + 4y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ = vecteur directeur de (n)

$\Rightarrow$ la droite normale : $(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 12k \\ y = 1 + 4k \\ z = 0 + 3k \end{cases}$$

* $(n) \cap (\Sigma) : 144k^2 + 16k^2 + 9k^2 = 169$

$\Rightarrow 169k^2 = 169 \Rightarrow k = \pm 1$

$\Rightarrow T_1(15;5;3)$ et $T_2(-9;-3;-3)$

* $(\pi_1) : 12x + 4y + 3z + d_1 = 0 \; ; \; T_1 \in (\pi_1) \Rightarrow 180 + 20 + 9 + d_1 = 0$

$\Rightarrow d_1 = -209$

$\Rightarrow \boxed{(\pi_1) : 12x + 4y + 3z - 209 = 0}$

* $(\pi_2) : 12x + 4y + 3z + d_2 = 0 \; ; \; T_2 \in (\pi_2) \Rightarrow -108 - 12 - 9 + d_2 = 0$

$\Rightarrow d_2 = 129$

$\Rightarrow \boxed{(\pi_2) : 12x + 4y + 3z + 129 = 0}$