3MRf

Sphère

3.7.2 Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

a) le centre est $C(0; 2; -4)$ et le rayon est égal à 5,

b) le centre est $C(1; -2; 4)$ et elle passe par le point $P(3; 2; -1)$,

c) l'un de ses diamètres est $[AB]$, où $A(-1; 0; 5)$ et $B(7; 4; -7)$,

d) elle passe par les points $A(4; 2; -3)$ et $B(-1; 3; 1)$, et a son centre sur la droite $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$

e) elle est centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$,

f) le centre est $C(4; 1; -5)$ et elle est tangente au plan d'équation $x + 2y + 2z = 4$,

g) elle passe par les points $M(0; 3; -4)$, $N(2; 2; -3)$ et $P(10; 1; -8)$, et son rayon vaut $5\sqrt{2}$,

h) elle passe par les points $R(-2; 2; 3)$, $S(0; 4; 1)$ et $T(-5; 5; -1)$, et a son centre sur le plan d'équation $x + 3y = 2z + 7$,

i) elle passe par les quatre points $E(5; 7; -2)$, $F(3; 1; 0)$, $G(-5; 12; 3)$ et $H(-3; -2; -1)$,

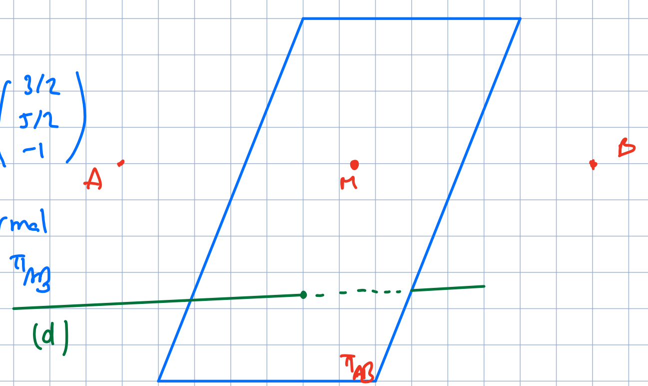
j) elle passe par les points $M(8; 8; 9)$, $N(-1; -1; 9)$ et $P(11; 5; 9)$, et est tangente au sol.

d) Le centre de la sphère est donné par l'intersection du plan médiateur $\pi_{(AB)}$ du segment AB avec la droite d.

Soit M le milieu de AB

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(AB)} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}_{\pi_{(AB)}}$: vecteur normal du plan π_{AB}



$\Rightarrow \pi_{(AB)} : -5x + y + 4z + k = 0$

$M \in \pi_{(AB)} \Rightarrow -5 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 9$

$\Rightarrow \pi_{(AB)} : -5x + y + 4z + 9 = 0$

* Déterminer le centre de la sphère :

$(d) \cap \pi_{(m_0)} \Rightarrow \begin{cases} -5x + y + 4z + 9 = 0 \\ x = 2-k \\ y = 3+2k \\ z = 7+2k \end{cases}$

$\Rightarrow -5(2-k) + (3+2k) + 4(7+2k) + 9 = 0$

$\Rightarrow 15k = -30 \Rightarrow k = -2$

$\Rightarrow C(4;-1;3)$

* Déterminer r de la sphère :

$r = \|\vec{AC}\| \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \sqrt{45}$

d'où $\boxed{(\Sigma) : (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45}$

e) La droite (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

" tangente à la droite d " $\Rightarrow \delta(C;d) = r$ où $C(0;0;0)$ centre de la sphère

Formule CRM : $\delta(P;d) = \dfrac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$ si $A \in d$ et que $\vec{d}$ est un vecteur directeur.

Dans ce cas, $P = C(0;0;0)$, $A = (3;5;5)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \delta(C;d) = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{6}}$

d'où (Σ) : $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{350}{6}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \frac{175}{3}}$

f) On a : $r = \delta(C ; \pi)$ avec $C(4 ; 1 ; -5)$

et (π) : $x + 2y + 2z = 4$

$$\Rightarrow \delta(C;\pi) = \frac{|4 + 2\cdot(1) + 2\cdot(-5) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Sigma) : (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}}$$

g) D'abord, on détermine l'intersection des plans médiateurs des segments MN et MP.

$\vec{MN} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, milieu : $T\left(1 ; \frac{5}{2} ; -\frac{7}{2}\right)$

$\vec{MP} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, milieu : $S\left(5 ; 2 ; -6\right)$

$\Rightarrow$ équation du plan médiateur de MN :

$\pi_{(MN)}$: $2x - y + z + k = 0$

$T \in \pi_{(MN)} \Rightarrow 2 - \frac{5}{2} - \frac{7}{2} + k = 0$

$\Rightarrow k = 4$

$\Rightarrow \pi_{(MN)}$: $2x - y + z + 4 = 0$

Équation du plan médiateur de MP :

$\pi_{(MP)}$: $5x - y - 2z + k = 0$

$S \in \pi_{(MP)} \Rightarrow 25 - 2 + 12 + k = 0 \Rightarrow k = -35$

$\Rightarrow \pi_{(MP)}$: $5x - y - 2z - 35 = 0$

* On peut également déterminer $\Pi_{(NP)}$: $8x - y - 5z - 74 = 0$

où $\vec{NP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $G\left(6 ; \frac{3}{2} ; -\frac{11}{2}\right)$ milieu de NP.

* On résoud le système : $\begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ 5x - y - 2z - 35 = 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 8x - y - 5z - 74 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z + 13 \\ y = 3z + 30 \\ \underbrace{z = z} \end{cases}$

c'est l'équation de la droite sur laquelle se trouvent tous les centres des sphères passant par M, N et P.

* Soit $C_k\left(k + 13 ; 3k + 30 ; k\right)$ sur cette droite. Pour que C_k soit le centre d'une sphère passant par le point N, il faut que $\|\vec{NC_k}\| = 5\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Cela nous donne l'équation :

$$\left\| \begin{pmatrix} k+11 \\ 3k+28 \\ k+3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 50 \iff (k+11)^2 + (3k+28)^2 + (k+3)^2 = 50$$

$$\iff 11k^2 + 196k + 864 = 0 \iff (k+8)(11k+108) = 0$$

$$\Rightarrow k = -8 \text{ ou } k = -\frac{108}{11}$$

$\Rightarrow$ il y a donc 2 sphères possibles.

i) $k = -8 \rightarrow C(5 ; 6 ; -8)$

$$\Rightarrow \boxed{(\Sigma_1) : (x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50}$$

ii) $k = -\frac{108}{11} \Rightarrow C(35/11 ; 6/11 ; -108/11)$

$$\Rightarrow \boxed{(\Sigma_2) : \left(x - \frac{35}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{11}\right)^2 + \left(z + \frac{108}{11}\right)^2 = 50}$$

h) Soit $C(x;y;z)$ centre de la sphère.

$$\vec{RC} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}, \quad \vec{SC} = \begin{pmatrix} x \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}; \quad \vec{TC} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-5 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

* $\|\vec{RC}\| = \|\vec{SC}\| \iff (x+2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = x^2+(y-4)^2+(z-1)^2$

$$\Rightarrow \quad 4x+4y-4z = 0$$

* $\|\vec{SC}\| = \|\vec{TC}\| \iff x^2+(y-4)^2+(z-1)^2 = (x+5)^2+(y-5)^2+(z+1)^2$

$$\Rightarrow \quad 10x-2y+4z+34 = 0$$

On résoud : $\begin{cases} x+y-z = 0 \\ 5x-y+2z+17 = 0 \\ x+3y-2z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+y = -17 \\ 6x+2y = -10 \end{cases}$

$$\Rightarrow 8x = -24 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow z = 1$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Sigma) : \quad (x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9}$$

i) Soit $C(x;y;z)$ centre de la sphère

$$\Rightarrow \vec{EC} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-7 \\ z+2 \end{pmatrix}; \quad \vec{FC} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{GC} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-12 \\ z-3 \end{pmatrix}; \quad \vec{HC} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

* $\|\vec{EC}\| = \|\vec{FC}\| \iff (x-5)^2+(y-7)^2+(z+2)^2 = (x-3)^2+(y-1)^2+z^2$

$$\iff -4x-12y+4z = -68$$

* $\|\vec{FC}\| = \|\vec{GC}\| \iff (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = (x+5)^2+(y-12)^2+(z-3)^2$

$$\iff 16x-22y-6z = -168$$

* $\|\vec{FC}\| = \|\vec{HC}\| \iff (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = (x+3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2$

$$\iff 12x+6y+2z = -4$$

$\Rightarrow$ On résoud $\begin{cases} x + 3y - z = 17 \\ 8x - 11y - 3z = -84 \\ 6x + 3y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 6y = 15 \\ 26x - 2y = -90 \end{cases}$

$\Rightarrow 85x = -255 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow z = -2$

$\Rightarrow C(-3\,;6\,;-2)$

et $r = \|\vec{EC}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$\Rightarrow \boxed{(\Sigma) : (x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 65}$

j) Soit $C(x\,;y\,;z)$ centre de la sphère.

$\Rightarrow \vec{MC} = \begin{pmatrix} x-8 \\ y-8 \\ z-9 \end{pmatrix}$; $\vec{NC} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-9 \end{pmatrix}$; $\vec{PC} = \begin{pmatrix} x-11 \\ y-5 \\ z-9 \end{pmatrix}$

* $\|\vec{MC}\| = \|\vec{NC}\| \Leftrightarrow (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-9)^2$

$\Rightarrow 18x + 18y = 126$

* $\|\vec{MC}\| = \|\vec{PC}\| \Leftrightarrow (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = (x-11)^2 + (y-5)^2 + (z-9)^2$

$\Rightarrow 6x - 6y = 18$

$\Rightarrow$ On résoud : $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 2$

* tangent au sol $\Rightarrow$ Sol (α) : $z = 0$

$\Rightarrow \delta(C\,;\alpha) = \dfrac{|z|}{1} = r \Rightarrow z^2 = r^2$

Équation de la sphère : $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z - z_C) = r^2 = z^2$

$N \in (\Sigma) \Rightarrow (-1-5)^2 + (-1-2)^2 + (9 - z_C)^2 = z_C^2$

$\Rightarrow 36 + 9 + 81 + \cancel{z_C^2} - 18z_C - \cancel{z_C^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad -18z_C = -126 \quad \Rightarrow z_C = 7$$

$$\Rightarrow C(5;2;7) \qquad \Rightarrow r^2 = 49$$

D'où $\boxed{(\Sigma): \ (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 49}$

3.7.3 Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-10)^2 = 25$ et de la droite $d : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z-5$.

$$(d) : \quad \frac{x-7}{6} = \frac{y+4}{-6} = z-5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-7}{6} = z-5 \\ \dfrac{y+4}{-6} = z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 6z-30 \\ y+4 = -6z+30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6z-23 \\ y = -6z+26 \\ z = 1z+0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; k \in \mathbb{R}$$

D'après le formulaire CRM :

$$\delta(P;d) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} \quad \text{avec } A \in d$$

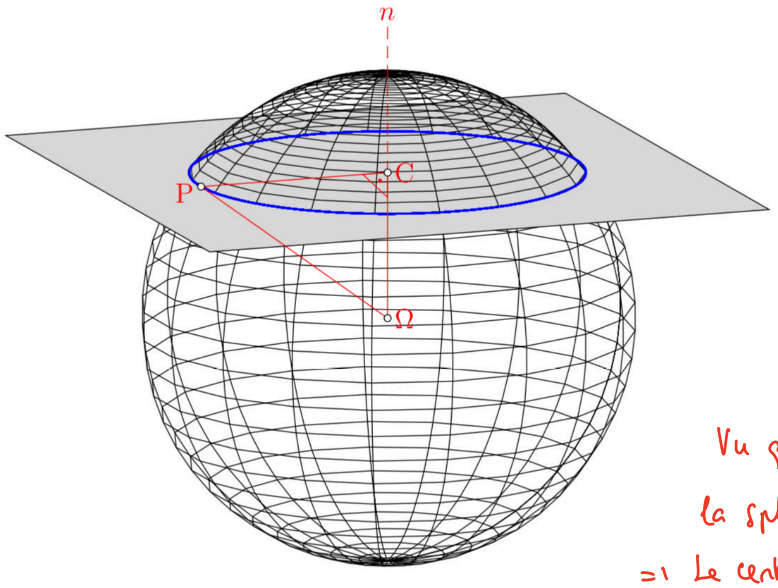
$\Rightarrow$ À l'aide de cette formule, on calcule la distance entre le centre de la sphère et la droite (d) :

$$A(-23;26;0) \ , \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ P(3;5;10)$$

$$\Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} 26 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta(P;d) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 26 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{3577}}{\sqrt{73}} = 7$$

$\Rightarrow \delta(P;d) = 7 > r = 5 \Rightarrow$ $\underline{(d) \text{ ne coupe pas la sphère } (\Sigma)}$. (d est extérieur à Σ)

3.7.4 Le système d'équations $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ détermine-t-il un cercle ? Si oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.



On commence par calculer la distance du centre de la sphère au plan donné à l'aide de la formule standard :

$$\frac{|2\cdot 3 - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{18}{3} = 6$$

Vu que $6 < r = 10$, le plan coupe la sphère selon un cercle.

=> Le centre de ce cercle est l'intersection entre la normale au plan passant par le centre de sphère et le même plan.

=> La normale au plan passant par le centre de la sphère a pour équation :

$$(n) : \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = -2 - 2\,\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Son intersection avec le plan donne le centre du cercle :

$2\,(3+2\,\lambda) - 2\,(-2-2\,\lambda) - (1-\lambda) + 9 = 0$
$6 + 4\,\lambda + 4 + 4\,\lambda - 1 + \lambda + 9 = 0$
$9\,\lambda + 18 = 0$
$\lambda = -2$

Les coordonnées du centre du cercle valent donc $\begin{cases} x = 3 + 2\cdot(-2) = -1 \\ y = -2 - 2\cdot(-2) = 2 \\ z = 1 - (-2) = 3 \end{cases}$

Le centre du cercle est ainsi $\boxed{\mathrm{C}(-1\,;2\,;3).}$

Le théorème de Pythagore permet d'obtenir facilement le rayon du cercle :

$$r = \|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}\|^2 - \|\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}\|^2} = \sqrt{10^2 - \left((-4)^2+4^2+2^2\right)} = \sqrt{64} = \boxed{8\ u}$$

3.7.5 Montrer que les deux sphères d'équations :

$$x^2+y^2+z^2=81 \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0$$

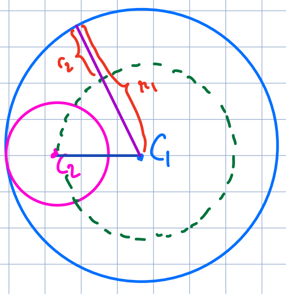
sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.

(Σ_1) : $x^2+y^2+z^2=81 \Rightarrow C_1(0;0;0)\ ,\ r_1=9$

(Σ_2) : $x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0 \Rightarrow C_2(2;6;-3)\ ,\ r_2=2$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\begin{pmatrix}2\\+6\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\|=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$$

Pour déterminer si les sphères sont tangentes intérieurement, on doit vérifier l'égalité suivante :



$$\|\overrightarrow{C_1C_2}\|=r_1-r_2$$

$$\Rightarrow 7 = 9-2$$

$\Rightarrow$ Les sphères (Σ_1) et (Σ_2) sont donc tangentes intérieurement.

* L'équation cartésienne de leur plan tangent commun :

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-81=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-4x-12y+6z+45$$

$$\Rightarrow 4x+12y-6z-126=0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x+6y-3z-63=0}$$ est le plan tangent commun.