Primitives et intégrales

Définition 1 :

Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ est une primitive de f

* Exemple :

$f(x) = 3x$, alors on peut avoir la primitive $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1$.

De manière générale, la primitive de $f(x) = 3x$ sera donnée par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}$$

Théorème (Famille de primitives)

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante

Définition 2 :

On appelle intégrale indéfinie de la fonction f et on note $\int f(x)\,dx$ toute expression de la forme $F(x) + C$ où F est une primitive de f et C une constante.

- $\int$ est le signe d'intégration
- $f(x)$ est la fonction à intégrer (dite aussi intégrande)
- dx est l'élément différentiel qui indique par rapport à quelle variable on intègre

Calculs de primitives :

La recherche d'une primitive n'est pas toujours facile, ni toujours possible.
Celles proposées ci-dessous découlent directement des règles de dérivation :

$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

① $\displaystyle\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

$\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$

② $\displaystyle\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

$\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n \left(f(x)\right)^{n-1} \cdot f'(x)$

③ $\displaystyle\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\left(f(x)\right)^{n+1} + C$

$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

④ $\displaystyle\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$

$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

⑤ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\left(|f(x)|\right) + C$

$\left(\sin\left(f(x)\right)\right)' = \cos\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$

⑥ $\displaystyle\int \cos\left(f(x)\right) \cdot f'(x)\, dx = \sin\left(f(x)\right) + C$

$\left(\cos\left(f(x)\right)\right)' = -\sin\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$

⑦ $\displaystyle\int \sin\left(f(x)\right) \cdot f'(x)\, dx = -\cos\left(f(x)\right) + C$

Techniques de calculs intégral

A) Technique de base :

1) Utilisation des primitives usuelles

2) Changement de variable affine :

pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt \quad (\alpha \neq 0)$, on peut utiliser le procédé suivant :

* Faire le changement de variable suivant : $u = \alpha t + \beta$; on obtient $du = \alpha\, dt$;
* Utiliser l'égalité :

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{a} f(u)\, du$$

$\Rightarrow$ Exemple :

Calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

On pose $u = 1 + x \Rightarrow du = dx$

$\Rightarrow x = u - 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 3 \Rightarrow u = 4$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int_1^4 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\, du = \int_1^4 \frac{u}{\sqrt{u}}\, du - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= \int_1^4 u \cdot u^{-\frac{1}{2}}\, du - \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}\, du = \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\, du - \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 - 2 u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^4 - 2\sqrt{u} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} u\sqrt{u} \Big|_1^4 - 2\sqrt{u} \Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} - \frac{2 \cdot 1\sqrt{1}}{3} - \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}\right) = \frac{8 \cdot 2}{3} - \frac{2}{3} - 4 + 2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{14-6}{3} = \underline{\frac{8}{3}}$$

3) Intégration par parties :

La règle d'intégration par parties correspond à la règle de dérivation de la multiplication : $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \left(f'(x) \cdot g(x) + \left(f(x) \cdot g'(x)\right)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx}$$

et

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx}$$

$\Rightarrow$ Exemple :

*) $\int_0^1 t\, e^{2t}\, dt$

posons $f(t) = t$ et $g'(t) = e^{2t}$

On a : $f'(t) = 1$

$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{2} e^{2t}$

f' et g' continues sur $[0; 1]$

Donc $\int_0^1 t\, e^{2t}\, dt = \left[t \cdot \frac{1}{2} e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2t}\, dt$

$$= \underline{\frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)}$$

**) $K = \int_0^{\pi} \cos(t)\, e^{t}\, dt$

posons $f(t) = \cos(t)$ et $g'(t) = e^{t}$

$\Rightarrow f'(t) = -\sin(t)$ et $g(t) = e^{t}$

f' et g' sont continues sur $[1 ; \pi]$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cos(t)\, e^{t}\, dt = \left[\cos(t) \cdot e^{t} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin(t) \cdot e^{t}\, dt$

$K = -(e^{\pi} + 1) + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(t)\, e^{t}\, dt}$

posons $A = \int_0^{\pi} \sin(t)\, e^{t}\, dt$

$\Rightarrow h(t) = \sin(t)$ et $g'(t) = e^{t}$

$\Rightarrow h'(t) = \cos(t)$ et $g(t) = e^{t}$

h' et g' sont continues sur $[0 ; \pi]$

$\Rightarrow A = \left[\sin(t)\, e^{t} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(t)\, e^{t}\, dt$

$= -\int_0^{\pi} \cos(t)\, e^{t}\, dt$

Il en résulte que : $K = -(e^{\pi} + 1) - K$

$\Rightarrow \underline{K = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi} + 1\right)}$

a) Intégrales impropres :

Définition :

$$\boxed{\begin{aligned}
&* \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \\
&* \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \\
&* \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}}$$

* Exemple :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_2^b = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{x}\Bigg|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{b} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

Définition :

- Si une fonction f est continue sur $]a;b]$, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to a^+} \int_\lambda^b f(x)\,dx$$

- Si une fonction f est continue sur $[a;b[$, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to b^-} \int_a^\lambda f(x)\,dx$$

- Si une fonction f est continue sur $[a\,;c[$ puis sur $]c\,;b]$, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_1 \to c^-} \int_a^{\lambda_1} f(x)\,dx + \lim_{\lambda_2 \to c^+} \int_{\lambda_2}^b f(x)\,dx$$

=, Dans ce dernier cas, l'intégrale existe si et seulement si les deux limites d'intégrales admettent une valeur finie.

* Remarque :

Si la fonction f est continue sur tout l'intervalle $[a\,;b]$, chacune de ces 3 définitions donne la même valeur que le calcul direct : $\int_a^b f(x)\,dx$

5) Intégration de fonctions rationnelles :

- Une des nombreuses utilités de la fonction logarithme est de permettre le calcul de certaines primitives de fonctions rationnelles

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ où f et g sont des fonctions polynomes.

- La méthode d'intégration est basée sur la décomposition de $q(x)$ en somme d'éléments simples.

* **Exemple** :

On veut déterminer les primitives de $g(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

i) on effectue d'abord la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & +1 & x^3 - 2x^2 + x \\
\hline
-\ 2x^3 & -4x^2 & +2x & +0 & 2 \\
\hline
 & -x^2 & +3x & +1 &
\end{array}
$$

donc $g(x) = 2 + \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1} = 2 + \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)}$

$\Rightarrow g(x) = 2 + \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x(x-1)^2}$

ii) On détermine ensuite les nombres A, B et C tels que l'égalité :

$$\frac{-x^2 + 3x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \qquad (*)$$

soit vraie pour tout x différent de 0 et de 1.

iii) En multipliant les deux membres de cette égalité par $x(x-1)^2$, on obtient l'égalité :

$$-x^2 + 3x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \qquad (**)$$

qui doit être vraie pour tout x différent de 0 et de 1.

Or si cette égalité est vraie pour tout x réel, elle sera encore vérifiée si x est différent de 0 et de 1.

$\Rightarrow$ Il suffit donc de trouver trois nombres A, B et C vérifiant l'égalité ci-dessus pour tout x réel.

$\Rightarrow$ Les deux polynomes $-x^2+3x+1$ et $A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$ étant égaux, les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.

D'où

$$A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = A(x^2+1-2x) + Bx^2 - Bx + Cx$$
$$= Ax^2 + A - 2Ax + Bx^2 - Bx + Cx$$
$$= x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A$$

Par conséquent :

$(**)$ devient : $-x^2+3x+1 = x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A$

$$\begin{cases} A+B = -1 \\ -2A - B + C = 3 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Ainsi $(*)$ devient : $\dfrac{-x^2+3x+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$

Finalement :

$$\int \frac{2x^3-5x^2+5x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right)dx$$

Rappel : $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$

$\Rightarrow \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx$

$$= 2x + \ln(|x|) - 2\ln(|x+1|) + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx$$

où $\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = 3\int (x-1)^{-2}\,dx = -\frac{3}{x-1}$

donc $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 2x + \ln(|x|) - 2\ln(|x+1|) - \frac{3}{x-1} + C$

6) Intégration de fonctions trigo (sous forme de produit de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)

Les intégrales de produits de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ se calculent en suivant la marche à suivre suivante :

a) Si m est un entier impair : Écrire l'intégrale sous la forme :

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx = \int \sin^{m-1}(x)\cos^n(x)\sin(x)\,dx$$

et exprimer $\sin^{m-1}(x)$ en termes de $\cos(x)$ au moyen de l'identité trigonométrique $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Effectuer la substitution :

$$u = \cos(x)\,,\quad du = -\sin(x)\,dx$$

et calculer l'intégrale en u.

b) Si n est un entier impair : Écrire l'intégrale sous la forme :

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx = \int \sin^m(x)\cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx$$

et exprimer $\cos^{n-1}(x)$ en termes de $\sin(x)$ au moyen de l'identité trigonométrique $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Effectuer la substitution :

$$u = \sin(x)\,,\quad du = \cos(x)\,dx$$

et calculer l'intégrale en u.

c) Si m et n sont pairs : Abaisser les exposants de moitié à l'aide des formules de l'angle demi appliquée à $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$.