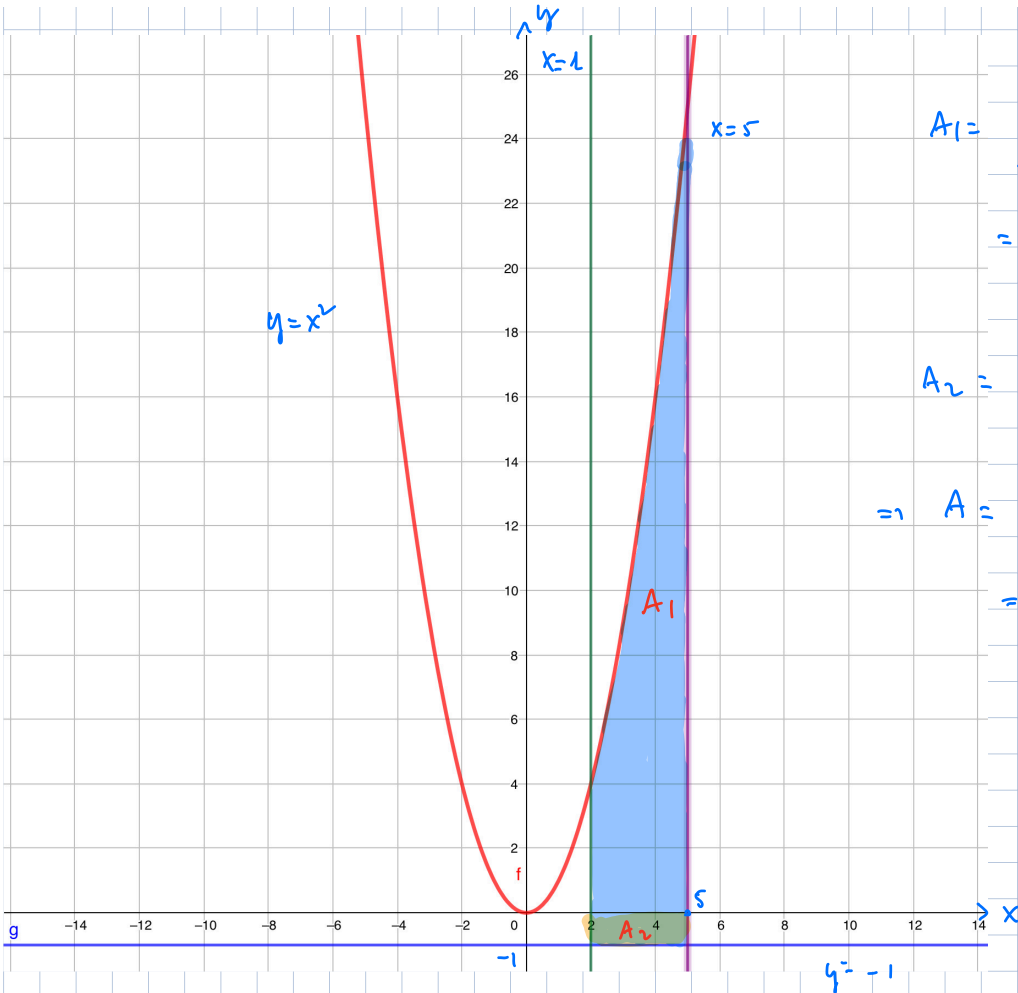
Primitives et Intégrales

2.2.29 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y = x^2, \quad y = -1, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 5$$



$$A_1 = \int_2^5 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39\ u^2$$

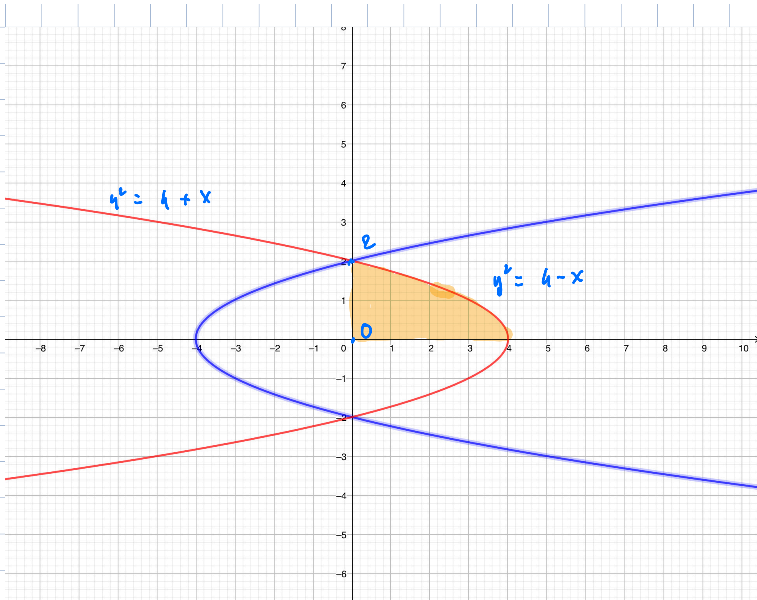
$$A_2 = 1 \cdot 3 = 3\ u^2$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = 39 + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 42\ u^2}$$

2.2.30 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y^2 = 4 - x \quad \text{et} \quad y^2 = 4 + x$$



$*\quad y^2 = 4 - x$

$\Rightarrow x = 4 - y^2$

$*\quad y^2 = 4 + x$

$\Rightarrow x = y^2 - 4$

$\Rightarrow A = 4\displaystyle\int_0^2 (4 - y^2)\,dy$

$= 4\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4\left(8 - \frac{8}{3}\right)$

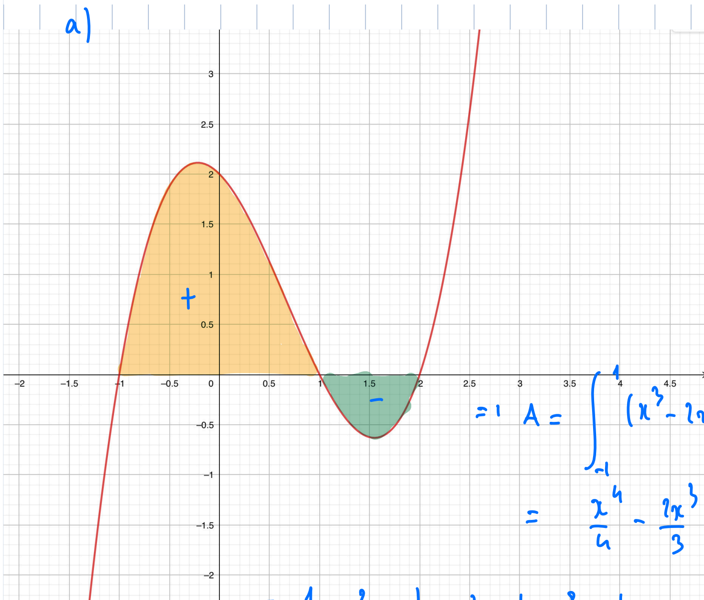
$\Rightarrow \boxed{A = \frac{64}{3}\,u^2}$

2.2.25 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

a)



Zéros de $f(x)$:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff x^2(x-2) - (x-2) = 0$

$\iff (x-2)(x-1)(x+1) = 0$

(ou par Horner)

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$ et $x_3 = 2$

$\Rightarrow A = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2$

$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \boxed{\frac{37}{12}\,u^2}$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

zéros : $x = 0$, $x = \pm 2$

$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$

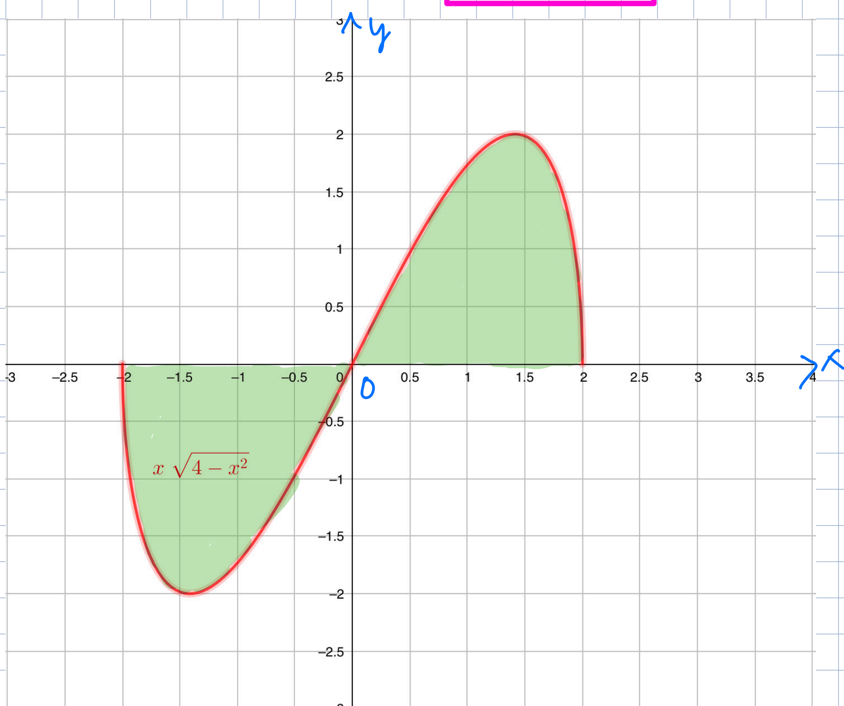
$\Rightarrow$ f est impaire $\Rightarrow$ symétrie par rapport à l'origine.

$$\Rightarrow \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{u'}\underbrace{(4-x^2)}_{u^{1/2}}{}^{\frac{1}{2}}dx$$

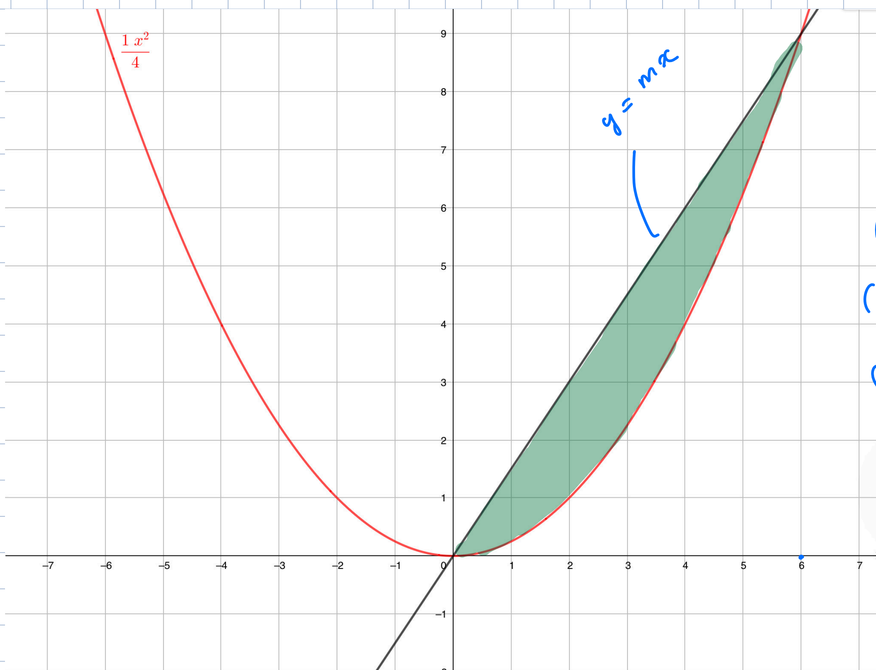
$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left.(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left.\sqrt{(4-x^2)^3}\right|_0^2 = -\frac{1}{3}\sqrt{(4-4)^3} - \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(4-0)^3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow A = 2\cdot\frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}\ u^2}$$



2.2.31 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les courbes $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ soit égale à 9.



Zéros :

$$\frac{1}{4}x^2 = mx$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4mx$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4mx = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4m) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ et } x = 4m$$

$$A = \int_0^{4m} \left(mx - \frac{1}{4}x^2\right) dx = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^{4m} = 9$$

$$\Leftrightarrow m\frac{16m^2}{2} - \frac{64m^3}{12} - 0 = 9$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 - \frac{16m^3}{3} = 9 \Leftrightarrow \frac{8m^3}{3} = 9$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 = 27 \Leftrightarrow m^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

D'où $\boxed{m = \frac{3}{2}}$

2.2.32 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume, sachant que :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x$ b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) $f(x) = x^2 + 2x$

Les zéros : $f(x) = 0 \iff x^2 + 2x = 0$

$\iff x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -2$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-2}^{0} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 4x^2)\, dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{0}$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{0} = \pi \cdot (0) - \pi \cdot \left(\frac{(-2)^5}{5} + (-2)^4 + \frac{4(-2)^3}{3} \right)$$

$$V = -\pi \left(-\frac{32}{5} + 16 - \frac{32}{3} \right) = -\frac{\pi}{15} \left((-32) \cdot 3 + 16 \cdot 15 - 32 \cdot 5 \right)$$

$$= -\frac{\pi}{15} \cdot (-96 + 240 - 160) = \frac{-\pi}{15} \cdot (-16) = \boxed{\frac{16}{15} \pi\, u^3}$$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Les zéros : $1 - x^2 = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} dx - \pi \int_{-1}^{1} x^2\, dx$$

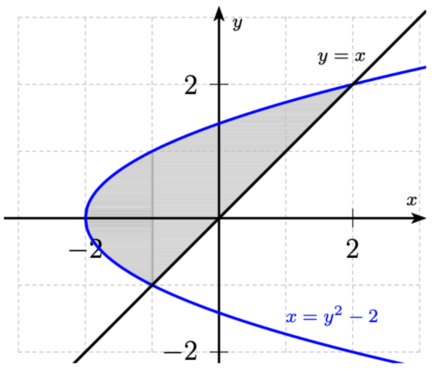
$$= \pi x \Big|_{-1}^{1} - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \pi - (-\pi) - \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= \pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi - 2\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{3}\, u^3}$$

2.2.33 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite $y = x$,

a) en prenant x comme variable d'intégration ;

b) en prenant y comme variable d'intégration.



a) $x = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

$$\mathcal{A} = 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{x+2}\,dx + \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+2} - x)\,dx =$$

$$2\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2$$

b) $$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2)\,dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\Bigg|_{-1}^{2} = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2$$

2.2.34 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume :

a) $f(x) = x + 1, \quad a = 1, b = 3$

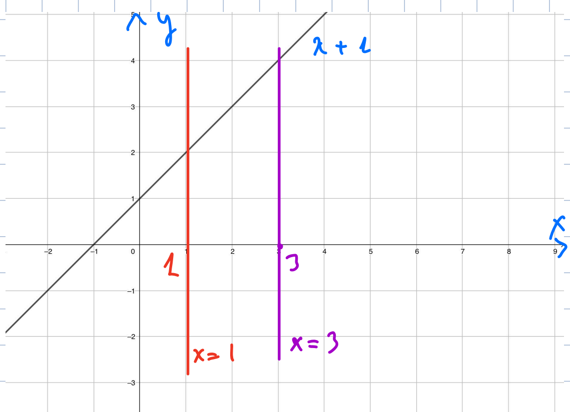
b) $f(x) = x^2, \quad a = 0, b = 4$

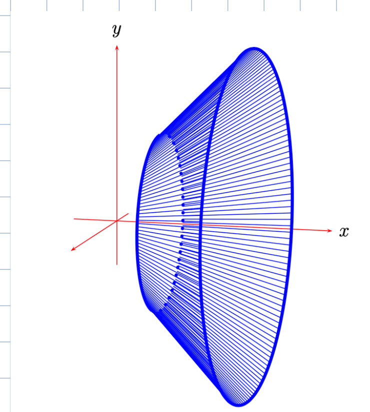
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad a = 1, b = 2$

d) $f(x) = \cos(x), \quad a = -\dfrac{\pi}{2}, b = \dfrac{\pi}{2}$

a) $f(x) = x+1$, $a = 1$, $b = 3$

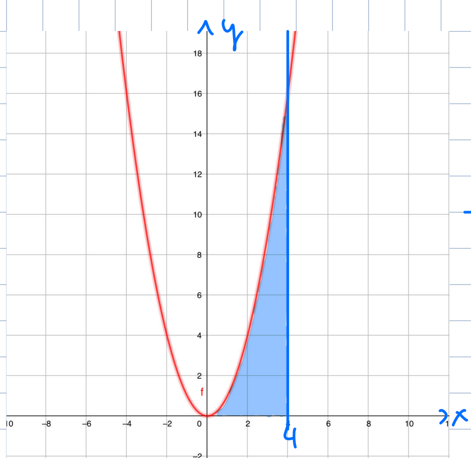
$$\Rightarrow V = \pi \int_1^3 (x+1)^2 \, dx = \frac{\pi}{3} (x+1)^3 \Big|_1^3 = \frac{\pi}{3} (64 - 8) = \boxed{\frac{56}{3} \pi \, u^3}$$

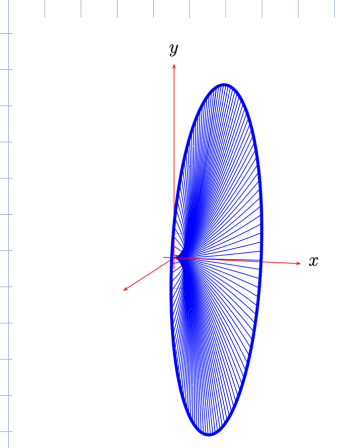




b) $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 4$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^4 (x^2)^2 \, dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \pi \cdot \frac{(4)^5}{5} - 0 = \boxed{\frac{1024}{5} \pi \, u^3}$$





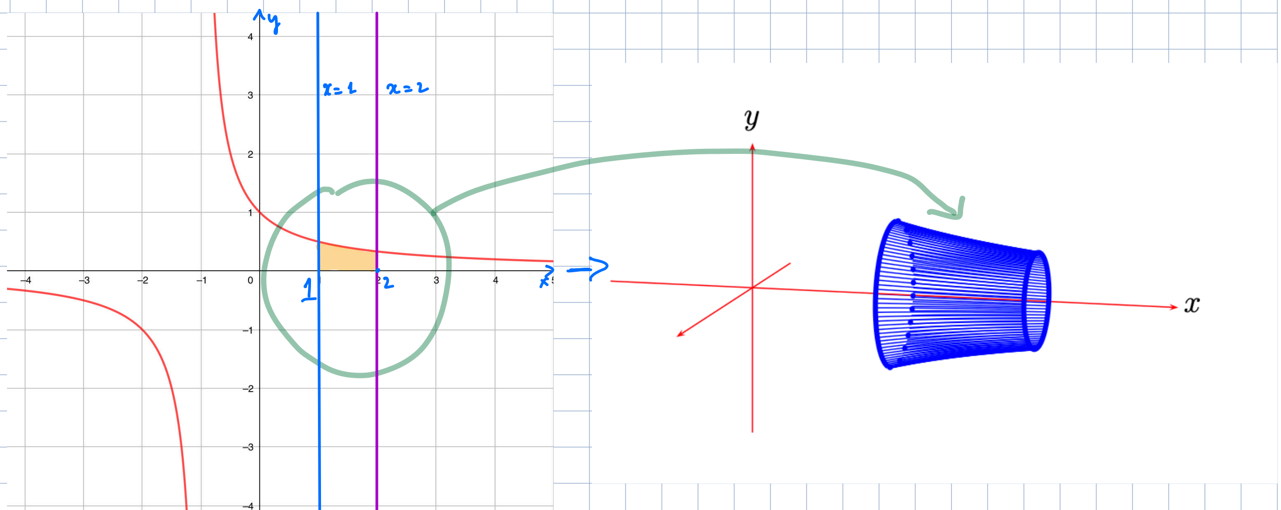
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $a = 1$, $b = 2$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \pi \int_1^2 (x+1)^{-2} dx$$

$$= \pi \left. \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} \right|_1^2 = \pi \left. \frac{(x+1)}{-1} \right|_1^2 = -\pi \left. \frac{1}{x+1} \right|_1^2$$

$$= -\pi \frac{1}{3} - \left(-\pi \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{-2\pi + 3\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{6} \; u^3}$$



2.2.35 Le domaine borné délimité par la courbe d'équation

$$y = k\,(1 - k\,x)\,\sqrt{x}$$

pour $k > 0$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant de la valeur du paramètre k.

$k\,(1 - kx)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,,\; x_2 = \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow k^2 \pi \int_0^{\frac{1}{k}} (1-kx)^2 \cdot x\, dx = k^2 \pi \int_0^{1/k} (x - 2kx^2 + k^2 x^3) \cdot x\, dx = k^2 \pi \left. \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2kx^3}{3} + \frac{k^2 x^4}{4} \right) \right|_0^{1/k}$$

$$= k^2 \pi \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{2}{3k^2} + \frac{1}{4k^2} \right) = k^2 \pi \cdot \frac{1}{12k^2} = \boxed{\frac{\pi}{12} \; u^3}$$

2.2.36 Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

Rappel : $\text{Aire} = \int_a^b (\text{dessus} - \text{dessous})\, dx$

Remarque :

Si on ne sait pas (absence de dessin) quelle courbe est au-dessus, on choisit au hasard et on prend la valeur absolue de la réponse.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

Les zéros : $f(x) = g(x) \iff \sqrt{x} = x^2 \iff x = x^4$

$\iff x^4 - x = 0 \iff x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,;\, x_2 = 1$

$$\Rightarrow V = \pi \left| \int_0^1 \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx \right| = \pi \left| \int_0^1 (x - x^4)\, dx \right|$$

$$= \pi \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right| = \pi \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right| = \pi \left| \frac{5-2}{10} \right|$$

$$\boxed{V = \frac{3}{10}\pi \ u^3}$$

* Si on prend : $V = \pi \left| \int_0^1 \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx \right|$

alors on a : $V = \pi \left| \int_0^1 (x^4 - x)\, dx \right| = \pi \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right|$

$$\Rightarrow V = \pi \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right| = \pi \left| \frac{2-5}{10} \right| = \pi \left| \frac{-3}{10} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \pi \cdot \frac{3}{10} \ u^3}$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

Les zéros : $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 6 = -x^2 + 10$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 6 - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

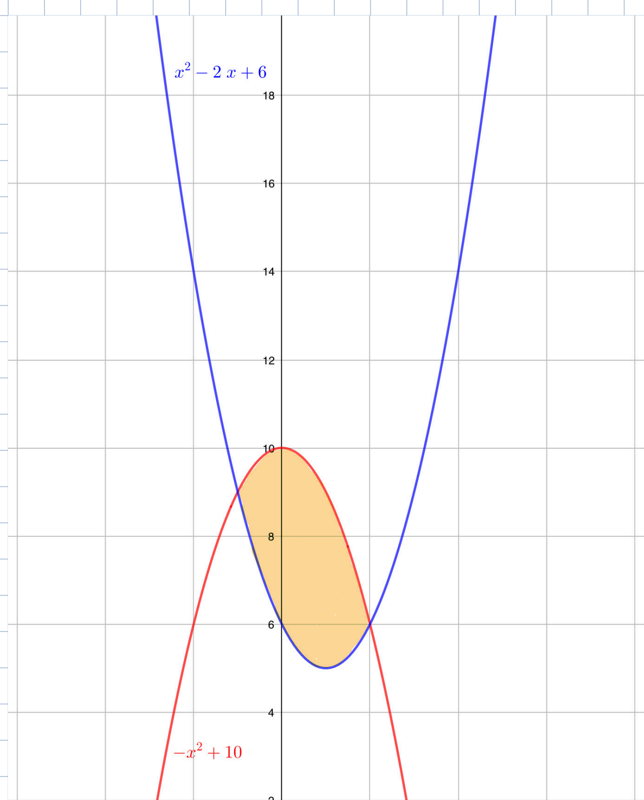
$$\Rightarrow 2(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \ ; \ x_2 = 2$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^{2} \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx = \pi \int_{-1}^{2} \left((-x^2+10)^2 - (x^2-2x+6)^2\right) dx$$

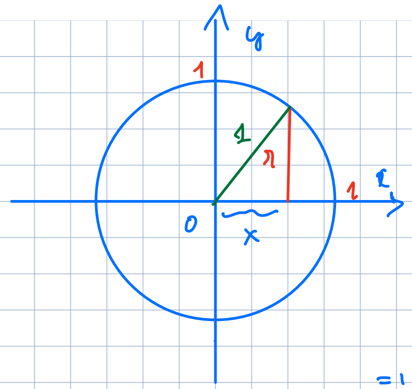
$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^4 - 20x^2 + 100 - x^4 - 4x^2 - 36 + 4x^3 - 12x^2 + 24x\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(4x^3 - 36x^2 + 24x + 64\right) dx = \pi \left(x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 64x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \pi (96 + 39) \Rightarrow \boxed{V = 135\pi \ u^3}$$



2.2.37 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 1. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est un disque. Après avoir montré que l'aire de la section située à l'abscisse x vaut $A(x) = \pi\,(1-x^2)$, en déduire par calcul le volume de ce solide.



– Équation du cercle (disque)

$x^2 + y^2 = 1$

– Calcul r : Pythagore : $1 = x^2 + r^2$

$\Rightarrow r^2 = 1 - x^2 \Rightarrow r = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ L'aire du disque de rayon $r = \sqrt{1-x^2}$

$A = \pi . r^2 = \pi\,(1-x^2)$

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi u^3}$$

2.2.38 Les axes de coordonnées et la parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le premier quadrant. Déterminer l'équation de la droite verticale (valeur approchée) qui partage ce domaine en deux parties de même aire.

* zéros : $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

$$\Rightarrow \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big|_0^3 = -9 + 9 + 9 = 9$$

* $x = m$

$$\Rightarrow \int_0^m (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big|_0^m = -\frac{m^3}{3} + m^2 + 3m = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2m^3 - 6m^2 - 18m + 27 = 0 \Rightarrow \boxed{m \cong 1{,}2051}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \cong 1{,}2051}$$

2.2.39 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Poser le calcul permettant de déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de :

a) l'axe Ox ;

b) l'axe Oy ;

c) la droite $x = 1$;

d) la droite $x = 2$;

e) la droite $y = 3$;

f) la droite $y = 6$.

a) $y = x^2 + 2$ et $y = 3x \rightarrow$ axe Ox

Les zéros : $x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 2$

on choisit au hasard la courbe :

$$V = \pi \left| \int_1^2 \left((x^2+2)^2 - (3x)^2 \right) dx \right| = \pi \left| \int_1^2 \left((x^4 + 4x^2 + 4) - 9x^2 \right) dx \right|$$

$$V = \pi \left| \int_1^2 \left(x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 \right) dx \right| = \pi \left| \int_1^2 \left(x^4 - 5x^2 + 4 \right) dx \right|$$

$$= \pi \left| \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right) \Big|_1^2 \right| = \pi \left| \frac{32}{5} - \frac{1}{5} - \left(5 \cdot \frac{8}{3} - 5 \cdot \frac{1}{3} \right) + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \right|$$

$$= \pi \left| \frac{31}{5} - \frac{40}{3} + \frac{5}{3} + 8 - 4 \right| = \pi \left| \frac{31}{5} - \frac{35}{3} + 4 \right| = \pi \left| \frac{31 \cdot 3 - 35 \cdot 5 + 4 \cdot 15}{15} \right|$$

$$= \pi \left| \frac{93 - 175 + 60}{15} \right| = \pi \underbrace{\left| \frac{-22}{15} \right|}_{\text{valeur absolue de } \frac{-22}{15} = \frac{22}{15}} = \boxed{\frac{22}{15} \pi \; u^3}$$

b) autour de l'axe Oy : $y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{y-2}}$

$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$

On prend les deux bornes en x : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ puis on calcule les deux bornes en y.

* $x = 1 \Rightarrow y = 3$ → borne en y

* $x = 2 \Rightarrow y = 6$ → borne en y

⇒ On calcule l'intégrale par rapport à y :

$$V = \pi \int_3^6 \left(\left(\sqrt{y-2} \right)^2 - \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right) dy = \pi \int_3^6 \left(y - 2 - \frac{y^2}{9} \right) dy$$

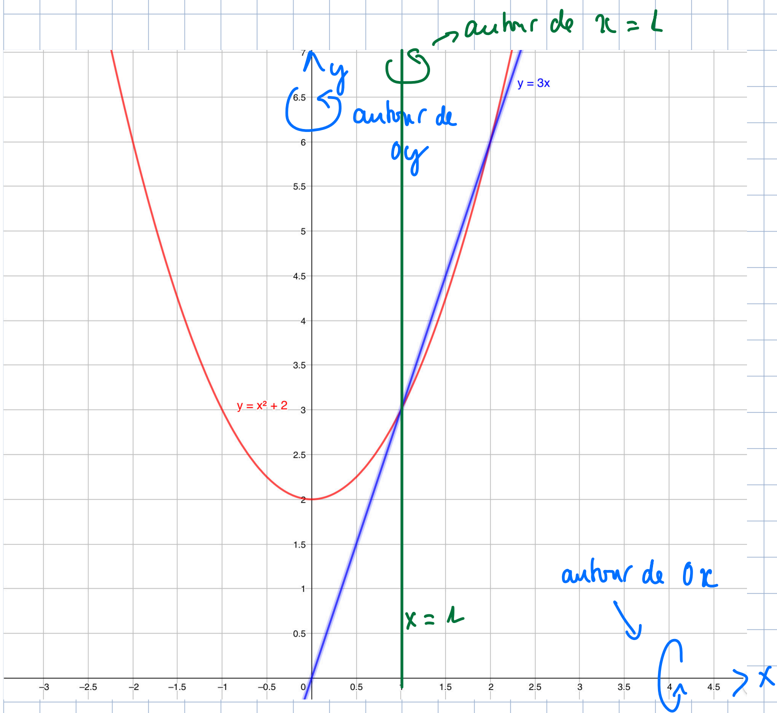
$$\Rightarrow V = \pi \int_3^6 \left(\frac{9y - 18 - y^2}{9} \right) dy = \frac{\pi}{9} \int_3^6 \left(9y - 18 - y^2 \right) dy$$

$$= \frac{\pi}{9} \left(9\frac{y^2}{2} - 18y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_3^6 = \frac{\pi}{9} \left(9 \cdot \frac{6^2}{2} - 9 \cdot \frac{3^2}{2} - (18 \cdot 6 - 18 \cdot 3) - \left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{9} \left(\frac{9 \cdot 36}{2} - \frac{9 \cdot 9}{2} - 108 + 54 - \frac{216}{3} + \frac{27}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{9} \left(162 - \frac{81}{2} - 54 - 72 + 9 \right) = \frac{\pi}{9} \left(45 - \frac{81}{2} \right) = \frac{\pi}{9} \left(\frac{90 - 81}{2} \right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{2} \ u^3}$$



c) autour de la droite $x = 1$

$\Rightarrow$ même démarche que autour de Oy (axe Oy c-à-d : $x = 0$)

$\Rightarrow$ on décale $x = \sqrt{y-2}$ et $x = \frac{y}{3}$ de 1

$$\Rightarrow \quad V = \pi \int_3^6 \left(\left(\sqrt{y-2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{y}{3} - 1 \right)^2 \right) dy$$

$$= \pi \int_3^6 \left(y - 2 - 2\sqrt{y-2} + 1 - \left(\frac{y^2}{9} - \frac{2y}{3} + 1 \right) \right) dy$$

$$= \pi \int_3^6 \left(y - 2 - 2\sqrt{y-2} \cancel{+1} - \frac{y^2}{9} - \frac{2y}{3} \cancel{-1} \right) dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} - 2y - \frac{4}{3}\sqrt{(y-2)^3} - \frac{y^3}{27} + \frac{y^2}{3} \right) \Bigg|_3^6$$

$$= \pi \left(10 - \frac{32}{3} - \frac{9}{2} + 4 + \frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{\pi}{6} \, u^3}$$

d) $V = -\pi \int_3^6 \left[\left(\sqrt{y-2} - 2\right)^2 - \left(\frac{y}{3} - 2\right)^2 \right] dy$

$= -\pi \int_3^6 \left(y - 2 - 4\sqrt{y-2} - \frac{y^2}{9} + \frac{4y}{3} \right) dy$

$= -\pi \left(\frac{y^2}{2} - 2y - \frac{8}{3}\sqrt{(y-2)^3} - \frac{y^3}{27} + \frac{2y^2}{3} \right) \Big|_3^6$

$= -\pi \left(22 - \frac{64}{3} - \frac{9}{2} + 1 + \frac{8}{3} \right) = \boxed{\frac{\pi}{6}\, u^3}$

e) $V = \pi \int_1^2 \left[(3x-3)^2 - (x^2-1)^2 \right] dx = \pi \int_1^2 (-x^4 + 11x^2 - 18x + 8)\, dx$

$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{11x^3}{3} - 9x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 = \pi \left(-\frac{32}{5} + \frac{88}{3} - 20 + \frac{1}{5} - \frac{11}{3} + 1 \right)$

$= \boxed{\frac{7}{15}\pi u^3}$

f) $V = -\pi \int_1^2 \left((3x-6)^2 - (x^2-4)^2 \right] dx = -\pi \int_1^2 (-x^4 + 17x^2 - 36x + 20)\, dx$

$= -\pi \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{17x^3}{3} - 18x^2 + 20x \right) \Big|_1^2 = -\pi \left(-\frac{32}{5} + \frac{136}{3} - 32 + \frac{1}{5} - \frac{17}{3} - 2 \right)$

$= \boxed{\frac{8}{15}\pi u^3}$

2.2.40 La base d'un solide est délimitée par les courbes d'équations

$$x = y^2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

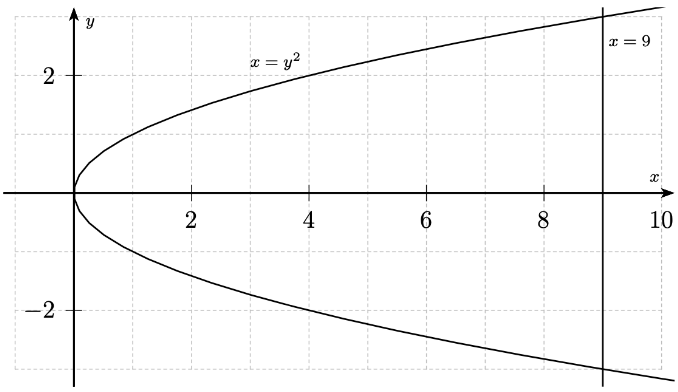
Calculer le volume de ce solide, sachant que chaque section de celui-ci par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est :

a) un carré ;

b) un demi-cercle ;

c) un triangle équilatéral ;

d) un trapèze dont la base supérieure mesure la moitié de la base inférieure et dont la hauteur mesure le quart de la base inférieure.



a) $A(x) = (2\sqrt{x})^2 = 4x \qquad \mathcal{V} = \displaystyle\int_0^9 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^9 = 162 \text{ u}^3$

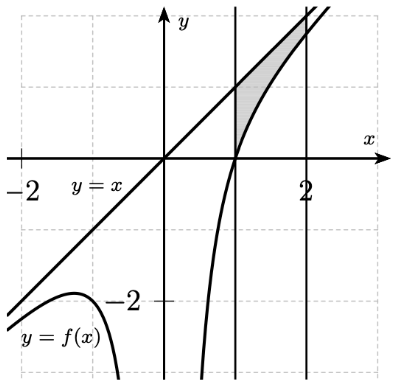
b) $A(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot (\sqrt{x})^2 = \dfrac{\pi x}{2} \qquad \mathcal{V} = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^9 x\,dx = \dfrac{\pi}{4}x^2\Big|_0^9 = \dfrac{81}{4}\pi \text{ u}^3$

c) $A(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{3}x \qquad \mathcal{V} = \sqrt{3}\displaystyle\int_0^9 x\,dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2\Big|_0^9 = \dfrac{81\sqrt{3}}{2} \text{ u}^3$

d) $A(x) = \dfrac{(2\sqrt{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}{4} = \dfrac{3x}{4} \qquad \mathcal{V} = \displaystyle\int_0^9 \dfrac{3x}{4}\,dx = \dfrac{3x^2}{8}\Big|_0^9 = \dfrac{243}{8} \text{ u}^3$

2.2.41 Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad (\text{AO}) : y = x$$



$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(x - \frac{x^3 - 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$