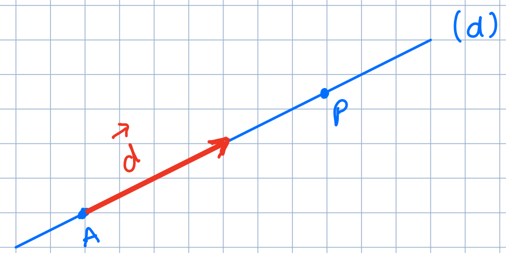
Le plan et la droite dans l'espace

Dans un repère de l'espace, on considère un point $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et un vecteur non nul $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$. On appelle (d) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.



1) Équation paramétrique de la droite

Pour tout point $P(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le point P appartient à la droite (d)

b) Les vecteurs $\vec{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires

c) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AP} = \lambda \vec{d} \iff \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d_1 \\ \lambda d_2 \\ \lambda d_3 \end{pmatrix}$

d) $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases} ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Cette formule constitue l'équation paramétrique de la droite (d).

2) Équations cartésiennes de la droite

Les équations cartésiennes de la droite s'obtiennent en éliminant le paramètre.

L'équation paramétrique équivaut à :

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda d_1 \\ y - a_2 = \lambda d_2 \\ z - a_3 = \lambda d_3 \end{cases}$$

Si $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ et $d_3 \neq 0$, ce système revient à :

$$\begin{cases} \dfrac{x - a_1}{d_1} = \lambda \\[2ex] \dfrac{y - a_2}{d_2} = \lambda \\[2ex] \dfrac{z - a_3}{d_3} = \lambda \end{cases}$$

d'où suivent les équations cartésiennes de la droite :

$$\boxed{\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}}$$

Si $d_1 = 0$, alors on obtient l'équation cartésienne $x - a_1 = 0$;

Si $d_2 = 0$, alors on obtient l'équation cartésienne $y - a_2 = 0$;

Si $d_3 = 0$, alors on obtient l'équation cartésienne $z - a_3 = 0$.

Les équations cartésiennes d'une droite, système indéterminé de 2 équations à trois inconnues, la caractérisent comme l'intersection de deux plans.

3) Déterminant

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ donnés dans une base $(\vec{e_1} ; \vec{e_2} ; \vec{e_3})$ de V_3. Le déterminant de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel

$$\operatorname{Det}(\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

* **Théorème**

- Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_2. On a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \operatorname{Det}(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$

- Soient trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de V_3. On a :

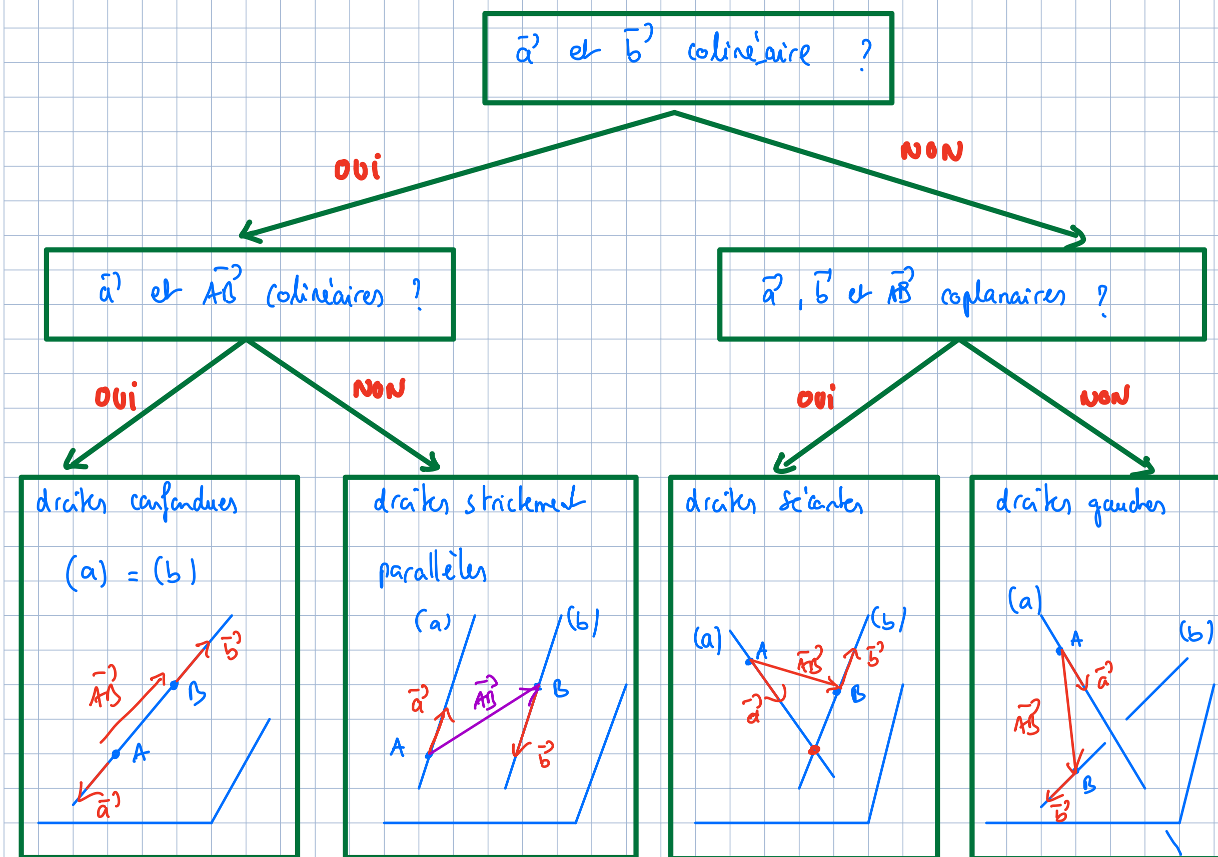
$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow \operatorname{Det}(\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}) = 0$

4) Positions relatives de deux droites

* Dans le plan, deux droites ne peuvent être que sécantes ou parallèles, la situation est plus riche dans l'espace. Deux droites de l'espace peuvent ne pas être coplanaires $\Rightarrow$ Elles sont alors dites gauches.

$\Rightarrow$ Deux droites de l'espace peuvent être confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches.

* Soient une droite (a) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{a}$ et une droite (b) passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{b}$. Leur position relative est décrite selon le schéma ci-dessous.



* Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan), soit non coplanaires.

* Deux droites de l'espace n'ayant aucun point commun ne sont pas forcément parallèles.

* Deux droites sont strictement parallèles si elles sont coplanaires et n'ont aucun point commun.

Ex :

Considérons la droite (d) passant par les points $A(3\,;\,0\,;\,1)$ et $B(2\,;\,1\,;-1)$ ainsi que la droite (e) passant par les points $C(4\,;-5\,;2)$ et $D(2\,;\,1\,;6)$.

Déterminer si $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.

5) Équation paramétrique du plan

Pour tout point $P(x\,;y\,;z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le point P appartient au plan π

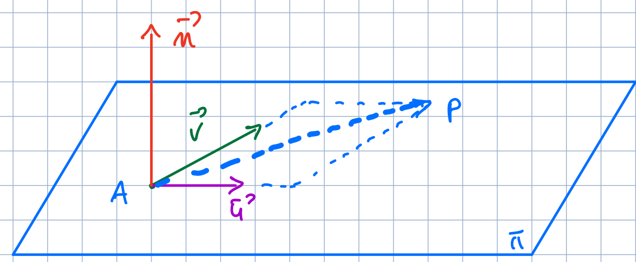
ii) Les vecteurs $\vec{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

iii) il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

c-à-d : $\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \\ \mu v_3 \end{pmatrix}$

iv) $$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Cette formule constitue l'équation paramétrique du plan π.



6) Équation cartésienne du plan

Pour tout point $P(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le point P appartient au plan π

ii) Les vecteurs $\vec{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

iii) $\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

iv) Avec $a = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $b = u_3 v_1 - u_1 v_3$, $c = u_1 v_2 - u_2 v_1$

et $d = -a_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) - a_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) - a_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)$

$\Rightarrow \quad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Cette formule s'appelle l'équation cartésienne du plan π.

7) Équation cartésienne du plan sous forme normale

Dans un repère orthonormé de l'espace, considérons un plan π défini par un point $A(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ et un vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Pour tout point $P(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le point P appartient au plan π.

ii) $\vec{n} \perp \vec{AP}$

iii) $0 = \vec{n} \cdot \vec{AP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = a(x-a_1) + b(y-a_2) + c(z-a_3)$

iv) $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -a_1 a - a_2 b - a_3 c$

Rappel :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan, le produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

fournit un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Problèmes métriques dans l'espace

1) Angles

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. On rappelle que l'angle φ entre ces deux vecteurs s'obtient à l'aide des formules :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\varphi) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}}$$

2) Distance d'un point à un plan

Soient un point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et un plan π d'équation $ax + by + cz + d = 0$

$\Rightarrow$ la distance du point P au plan π est donnée par la formule :

$$\boxed{\delta(P ; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

3) Plans bissecteurs

On considère deux plans d'équations respectives $(\pi_1) : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ et $(\pi_2) : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$. Les plans bissecteurs constituent le lieu géométrique des points équidistants des plans π_1 et π_2.

Aussi leurs équations sont fournies par la formule :

$$\boxed{\frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

4) Distance d'un point à une droite

On considère un point P, ainsi qu'une droite (d) passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$

L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{AP}$ vaut

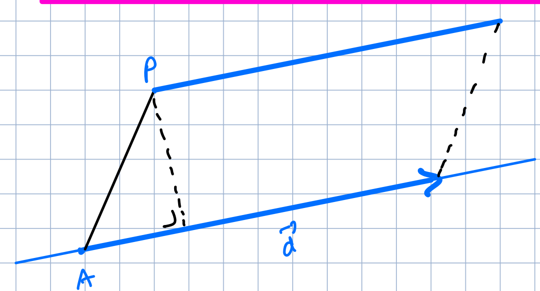
$$\|\vec{d}\| \cdot \delta(P;d)$$

On sait aussi que l'aire de ce parallélogramme est donnée par

$$\|\vec{AP} \wedge \vec{d}\|$$

$\Rightarrow$ L'égalité : $\|\vec{d}\| \cdot \delta(P;d) = \|\vec{AP} \wedge \vec{d}\|$ implique que la distance du point P à la droite (d) s'obtient par la formule :

$$\boxed{\delta(P;d) = \frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}}$$



5) distance de deux droites

Soient (d_1) passant par A et de vecteur directeur $\vec{d_1}$

(d_2) " " B " $\vec{d_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(d_1;d_2) = \frac{\left|(\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}) \cdot \vec{AB}\right|}{\|\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\|} = \frac{\left|\det(\vec{AB};\vec{d_1};\vec{d_2})\right|}{\|\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\|}}$$