Matrices

3MRf

1) Définition d'une matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres. Ces nombres sont arrangés horizontalement en lignes et verticalement en colonnes.

Si la matrice possède m lignes et n colonnes, on dit qu'elle est de type $m \times n$

De manière générale, une matrice de type $m \times n$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou bien $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Les nombres réels a_{ij} sont les termes ou coefficients de la matrice.

L'ensemble des matrices de type $m \times n$ se note $M_{m,n}(\mathbb{R})$

2) Matrices particulières

Une matrice de type $1 \times n$ est appelée matrice ligne.

Une matrice ligne s'écrit $(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \cdots a_{1n})$.

Une matrice de type $m \times 1$ est appelée matrice colonne.

Une matrice colonne s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Une matrice de type $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.

Une matrice carrée s'écrit
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $M_n(\mathbb{R})$.

Une matrice carrée A d'ordre n est appelée matrice triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$ avec $i > j$

Une matrice triangulaire supérieure s'écrit :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée A d'ordre n est appelée matrice triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$ avec $i < j$

Une matrice triangulaire supérieure s'écrit :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est dite matrice diagonale.

Une matrice diagonale s'écrit :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La diagonale de A est l'ensemble des éléments a_{ii}

Une matrice diagonale est appelée matrice scalaire si tous les termes de sa diagonale sont égaux.

une matrice scalaire s'écrit : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

La matrice scalaire d'ordre n qui n'a que des 1 sur la diagonale est appelée matrice identité et se note I_n

En d'autres termes : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

3) Opérations sur les matrices

a) Addition matricielle

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de type $m \times n$, leur somme $C = A + B$ est la matrice de type $m \times n$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ avec $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ex :

Calculer : 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$

* Propriétés de l'addition matricielle :

i) commutativité : $A + B = B + A$

ii) associativité : $(A+B)+C = A + (B+C)$

iii) existence d'un élément neutre : $A + O = A$

(O est la matrice dont tous les termes sont nuls)

iv) existence d'un élément inverse : $A + (-A) = O$

($-A$ s'obtient en opposant les termes de A)

b) Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et λ un nombre réel, leur produit $C = \lambda A$ est la matrice de type $m \times n$ définie par $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ avec

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

* Propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire :

i) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

ii) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

iii) $(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A)$

iv) $1 A = A$

v) $0 A = O$

vi) $\lambda O = O$

c) Multiplication matricielle

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice de type $n \times p$, leur produit $C = AB$ est la matrice de type $m \times p$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq m , \ 1 \leq j \leq p .$$

! **Attention :**

Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.

De plus, de manière générale :

$$AB \neq BA$$

* **Propriétés de la multiplication matricielle :**

i) associativité : $(AB)C = A(BC)$

ii) existence d'un élément neutre :

$$AI = IA = A \qquad (I \text{ matrice identité})$$

iii) distributivité à droite :

$$A(B+C) = AB + AC$$

iv) distributivité à gauche :

$$(A+B)C = AC + BC$$

v) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

a) Transposée d'une matrice

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$, sa transposée est la matrice $C = {}^tA$ de type $n \times m$ définie par $c_{ij} = a_{ji}$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

En d'autres termes, la matrice transposée ${}^tA$ s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

* Propriétés de la transposée :

i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

ii) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

iii) ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

5) Inverse d'une matrice :

Une matrice A carrée d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice X carrée d'ordre n telle que $AX = XA = I_n$

La matrice X est appelée matrice inverse de A, et notée : A^{-1}

! Remarque : La matrice inverse de A (si elle existe !) est de même dimension que A

* Exemple :

La matrice $B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

car

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (et donc $B \cdot A = I_2$ aussi)

* Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

La matrice inverse de A existe si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Le nombre $ad - bc$ s'appelle le déterminant de A

=> La matrice inverse s'obtient alors par la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

* Exemple :

de l'exemple précédent $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 1 = -5 \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-5} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = B$

de l'exemple précédent !

* Détermination de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot (Gauss - Jordan)

La méthode du pivot sert également à trouver l'inverse de toute matrice carrée A d'ordre n. Dans ce cas, on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid C)$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice C qui est l'inverse de la matrice A.

* **Exemple** :

Inverse d'une matrice par la méthode du pivot (Gauss - Jordan)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \; ?$$

$\Rightarrow$ A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

En effet $\det(A) = 4 \Rightarrow \exists \, A^{-1}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - 2L_1]{L_2 = L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{1}{4} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3]{L_1 = L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ La matrice inverse est donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

6) Méthode de résolution d'un système linéaire par matrice inverse

Si une matrice A est inversible, alors tout système d'équations $AX = B$ possède l'unique solution

$$\boxed{X = A^{-1} B}$$

* Exemple :

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Dans ce cas, la matrice A est inversible car :

$$\det(A) = 2(-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire la solution du système :

$$A \cdot X = B \quad \Big| \cdot A^{-1} \text{ à gauche}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{-3}{5}$$

! Remarques importantes :

- Cette méthode ne s'applique que dans le cas d'un système régulier, c-à-d un système dont le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et dont la matrice des coefficients est inversible.
- Cette méthode est pratique uniquement si la matrice inverse de A est connue ou facile à trouver.

7) Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot :

a) Définition :

Un système linéaire de m équations et à n inconnues à coefficients réels est un système d'équations du type :

$$(I)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres réels et les x_i les inconnues.

b) Démarche :

Résoudre le système (I) consistera à résoudre l'équation matricielle $AX = B$

Où :

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_i)_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = (b_i)_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

À ce système d'équations, nous associons la matrice suivante, appelée matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ensuite, on effectue certaines opérations sur les lignes de la matrice augmentée. Ces opérations nous conduiront à une détermination plus facile de l'ensemble des solutions du système d'équations.

c) Échelonnement d'une matrice :

* Définitions :

i) Le pivot d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne.

ii) Une matrice A est dite échelonnée si les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- le pivot d'une ligne est toujours situé à droite du pivot de la ligne précédente.
- Toutes les lignes nulles de la matrice (c-à-d constituée entièrement de zéro) sont situées sous les lignes qui comptent des éléments non nuls (donc un pivot)

+ Exemples :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1 est un pivot} \\ \leftarrow \text{2 est un pivot} \\ \leftarrow \text{3 est un pivot} \end{array}$$

Cette matrice n'est pas échelonnée contrairement à celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1 est un pivot} \\ \leftarrow \text{2 est un pivot} \\ \leftarrow \text{3 est un pivot} \end{array}$$

+ Définition :

- Une matrice A est dite échelonnée réduite si elle est échelonnée et si elle possède encore deux nouvelles conditions :
  i) Tous les pivots de la matrice valent 1
  ii) Dans toute colonne qui contient un pivot, tous les éléments autres que le pivot sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est une matrice échelonnée réduite

* Remarques :

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

- Permutation de 2 lignes
- Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.
- Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

* Théorèmes :

a) Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AX = B$

b) Toute matrice se transforme en une matrice échelonnée (ou mieux : échelonnée réduite) par une suite d'opérations élémentaires.

* Exemple : Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot.

L'exemple suivant illustre la méthode du pivot lors de la résolution d'un système d'équations linéaires.

- Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

=> L'équation matricielle équivalente est : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée est : $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

On va maintenant effectuer des opérations élémentaires de lignes pour échelonner et réduire cette matrice augmentée de ce système.

Rappel :

La méthode de Gauss - Jordan, ou méthode du pivot consiste à échelonner et réduire la matrice augmentée à l'aide d'opérations élémentaires.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{inverser les lignes 1 et 3}]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{multiplier la ligne 1 par (-1)}]{L_1 \to -L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}]{\text{L'élément } a_{11} \text{ est choisi comme pivot. Faire apparaître des 0 au dessous}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to L_3 - 5L_2}]{\text{L'élément } a_{22} \text{ est choisi comme pivot. Faire apparaître des 0 au dessous}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{20} L_3]{\text{Multiplier } L_3 \text{ par } -\frac{1}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 - 6L_3}]{\text{L'élément } a_{33} \text{ est choisi comme pivot. Faire apparaître des 0 au dessous}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Cette dernière matrice nous fournit la solution matricielle

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ et donc la solution unique du système d'équations $S = \{(-1 ; 1/2 ; 1/4)\}$

* Exemple : Inversion d'une matrice par la méthode du pivot.

Supposons que l'on cherche à inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre l'équation matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{X = A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$$

On va donc transformer la matrice augmentée $(A \mid I)$ en une matrice augmentée $(I \mid A^{-1})$ par des opérations élémentaires.

pivot => faire apparaître des zéros dans la première colonne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to 5L_3 - 2L_1]{L_2 \to 5L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to 11L_3 - 14L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 105 & 4 & -70 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{5} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 4 & -14 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to 21L_2 + 2L_3]{L_1 \to 21L_1 - 4L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 105 & 63 & 0 & 5 & 56 & -44 \\ 0 & 231 & 0 & -55 & 77 & 22 \\ 0 & 0 & 21 & 4 & -14 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{11} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 105 & 63 & 0 & 5 & 56 & -44 \\ 0 & 21 & 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & 4 & -14 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 105 & 0 & 0 & 20 & 35 & -50 \\ 0 & 21 & 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 21 & 4 & -14 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{L_2}{21} \\ L_3 \to \frac{L_3}{21}}]{L_1 \to \frac{L_1}{105}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{21} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{21} \end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{21} \\ -\frac{5}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{21} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{21} \end{pmatrix}$

* Remarque :

On a préféré utiliser des pivots différents de 1 pour retarder au maximum l'apparition de fractions.