Exercice :

On considère l'application linéaire f dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base du noyau de f.

b) Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

a) Rappel :

$f : E \to F$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ x \in E \mid f(x) = 0 \}$

=> pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

=> On va faire des opérations pour transformer A en matrice échelonnée et réduite : (car $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\text{matrice échelonnée réduite})$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 = 4L_1 - L_3}{\overset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\overset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ → matrice échelonnée réduite avec une ligne 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases} \quad (*)$$

⇒ 2 variables libres : z et t

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$ comme combinaison linéaire de v_1 et v_2

⇒ Ker(A) et l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

b) Im (A)

Rappel : $f : E \to F$

$$Im(f) = \{ y \in F \mid \exists x \in E , f(x) = y \}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Im(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Est-ce que ces 4 vecteurs sont linéairement indépendants ?

$\Rightarrow$ s'ils sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ il y a une seule solution

à l'équation : $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$\Leftrightarrow Ker(A) = \{0\}$

Mais ici, $Ker(A)$ n'est pas égal à $\{0\}$ $\Rightarrow$ c-à-d, ces vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ne sont pas linéairement indépendants

$\Rightarrow$ une combinaison linéaire

de ces vecteurs ne forment pas une base de Im(A) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

parce qu'ils sont linéairement dépendants $\Rightarrow$ cela veut dire que un de ces vecteurs qu'on peut écrire comme combinaison linéaire des autres.

$\Rightarrow$ si un vecteur $v \in \operatorname{Ker}(A)$, il vérifie l'équation suivante :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

! Test de linéairement indépendants

$\rightarrow$ z et t sont des variables libres, on peut prendre p.ex

$$z = 0 \ , \ t = -1$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$v \in \operatorname{Ker}(A)$, on connaît les expressions de x et y en fct de z et t

$\Rightarrow$ elles sont données par $(*)$

$$\begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

si on prend $z = 0$ et $t = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2(-1) \\ y = -2\cdot 0 - 3(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$(**) \Rightarrow -2\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Im(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

On peut faire de même manière :

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On prend p.ex : $z = -1$ et $t = 0$

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v \in \mathrm{Ker}(A)$, on connaît les expressions de x et y en fct de z et t

$\Rightarrow$ elles sont données par $(*)$

$$\begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$ si on prend $z = -1$ et $t = 0$

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 \\ y = -2(-1) - 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$(**) \Rightarrow -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}$ et ces 2 vecteurs sont linéairement indépendants !

$\Rightarrow$ Donc ils forment bien une base de $\mathrm{Im}(A)$

$*$ $\boxed{\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = 2}$