3mrf

Algèbre linéaire

1.2 Espaces vectoriels

1.2.1 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha; u) \longmapsto 0$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

$\to$ loi de composition externe : $1 \cdot u \neq u$

$\Rightarrow$ L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces 2 lois n'est pas un e.v

1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x; y) + (x'; y') \longmapsto (x + x'; y + y')$$

$$\alpha(x; y) \longmapsto (\alpha x; y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

On a : $(\alpha + \beta)(x; y) = \big((\alpha+\beta)(x;y) \neq ((\alpha+\beta)x; 2y) = (\alpha x; y) + \beta x; y\big)$

$= \alpha \cdot (x; y) + \beta \cdot (x; y)$

1.2.3 On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

des opérations usuelles :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Prouver que, muni des deux opérations ci-dessus, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ; préciser l'élément neutre de l'opération $+$ et l'opposé d'une matrice donnée.

$\Rightarrow$ Vérifier les 8 propriétés (4 pour $+$; 4 pour $\cdot$) $\Rightarrow$ c'est un ev

On a :

- $$\left(\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}a_3&b_3\\c_3&d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_3&b_3\\c_3&d_3\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3\\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ associativité de l'addition

- $$\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}$$
$\Rightarrow$ commutativité de d'addition

- $$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\text{élément neutre}}+\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ $\exists$ un élément neutre pour l'addition

- $$\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}-a_1&-b_1\\-c_1&-d_1\end{pmatrix}}_{\text{opposé}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ $\exists$ un symétrie pour l'addition (opposé)

- $$\alpha\left(\beta\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha\beta a&\alpha\beta b\\\alpha\beta c&\alpha\beta d\end{pmatrix}=(\alpha\cdot\beta)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

- $$1\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

- $$\alpha\left(\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+a_2)&\alpha(b_1+b_2)\\\alpha(c_1+c_2)&\alpha(d_1+d_2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha a_1&\alpha b_1\\\alpha c_1&\alpha d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha a_2&\alpha b_2\\\alpha c_2&\alpha d_2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

• $(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c & (\alpha+\beta)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta a & \alpha b+\beta b \\ \alpha c+\beta c & \alpha d+\beta d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} = \underline{\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

1.2.4 Si V est un espace vectoriel, $u, v \in V$, parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $\dfrac{u}{3}$ oui

b) $\dfrac{u+v}{2} - u$ oui

c) $u - 4$ non

d) $\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$ non

e) $u^2 - 2u + 1$ non

f) $2u - 3uv$ non

1.2.5 Soit T l'ensemble des applications de $[0; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = a\cos(x) + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble T, muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

Soient $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x) \in T$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

• $(f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x) = (a_1+a_2+a_3)\cos(x) + b_1+b_2+b_3$

$= \underline{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)}$ => associativité de l'addition

• $f_1(x) + f_2(x) = (a_1+a_2)\cos(x) + b_1+b_2 = \underline{f_2(x) + f_1(x)}$ => commutativité de l'addition

• $\underbrace{0}_{\text{élément neutre}} + a\cos(x) + b = \underline{a\cos(x) + b}$ => $\exists$ un élément neutre pour l'addition

• $a\cos(x) + b + \underbrace{(-a\cos(x) - b)}_{\text{opposé}} = \underline{0}$ => $\exists$ un symétrie pour l'addition (opposé)

• $\alpha(\beta f(x)) = \alpha\beta\cos(x) + \alpha\beta b = \underline{(\alpha\beta) f(x)}$

• $1 \cdot f(x) = a\cos(x) + b = \underline{f(x)}$

- $\alpha\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\alpha(a_1+a_2)f(x)+\alpha(b_1+b_2)=\alpha a_1\cos(x)+\alpha b_1+\alpha a_2\cos(x)+\alpha b_2$
$=\alpha(a_1\cos(x)+b_1)+\alpha(a_2\cos(x)+b_2)=\underline{\alpha f_1(x)+\alpha f_2(x)}$
- $(\alpha+\beta)f(x)=(\alpha+\beta)a\cos(x)+(\alpha+\beta)b=\alpha a\cos(x)+\alpha b+\beta a\cos(x)+\beta b$
$=\alpha(a\cos(x)+b)+\beta(a\cos(x)+b)=\underline{\alpha f(x)+\beta f(x)}$

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A=\{(x;y;z)|x=12\}$ $\quad$ $B=\{(x;y;z)|z=0\}$

$C=\{(x;y;z)|y=3x\}$ $\quad$ $D=\{(x;y;z)|2x+y+z=21\}$

$E=\{(x;y;z)|3x+4y-5z=0\}$ $\quad$ $F=\{(x;y;z)|xy=z\}$

$G=\{(x;y;z)|x^2+y^2=z^2\}$ $\quad$ $H=\left\{(x;y;z)|x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\right\}$

Rappel :

1) Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E forme un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que :

i) $u+v\in F$ pour tous $u,v\in F$;

ii) $\alpha\cdot u\in F$ pour tous $u\in F$ et $\alpha\in\mathbb{R}$

2) C'est une condition nécessaire, mais non suffisante, qu'un sous-ensemble F de E contienne le vecteur nul pour être un sous-espace vectoriel de E.

* $A=\{(x;y;z)|x=12\}$

$\Rightarrow (12;y;z)\in A$; $\exists\,\alpha=12\in\mathbb{R}$ tq $2(12;y;z)=(24;2y;2z)\notin A$

Donc A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $B=\{(x;y;z)|z=0\}$

$\Rightarrow (x_1;y_1;0),(x_2;y_2;0)\in B$

$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tq : $\alpha(x_1;y_1;0)+\beta(x_2;y_2;0)=(\alpha x_1+\beta x_2;\alpha y_1+\beta y_2;0)\in B$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $C = \{(x;y;z) \mid y = 3x\}$

$\Rightarrow (x_1; 3x_1; z_1), (x_2; 3x_2; z_2) \in C, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1; 3x_1; z_1) + \beta(x_2; 3x_2; z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2; 3(\alpha x_1 + \beta x_2); \alpha z_1 + \beta z_2) \in C$

Donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $D = \{(x;y;z) \mid 2x + y + z = 21\}$

$\exists (0; 21; 0)$ et $2(0;21;0) \in D$

Alors $(0;21;0) + 2(0;21;0) = (0; 42; 0) \notin D$

Donc D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $E = \{(x;y;z) \mid 3x + 4y - 5z = 0\}$

$\exists (x_1; y_1; z_1); (x_2; y_2; z_2) \in E$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1; y_1; z_1) + \beta(x_2; y_2; z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2; \alpha z_1 + \beta z_2)$

$\Rightarrow 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 4(\alpha y_1 + \beta y_2) - 5(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(\underbrace{3x_1 + 4y_1 - 5z_1}_{0}) + \beta(\underbrace{3x_2 + 4y_2 - 5z_2}_{0}) = 0$

$\Rightarrow \alpha(x_1; y_1; z_1) + \beta(x_2; y_2; z_2) \in E$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $F = \{(x;y;z) \mid xy = z\}$

$(1;1;1) \in F \quad ; \quad 2(1;1;1) = (2;2;2) \notin F$

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $G = \{(x;y;z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

$(1;0;1); (0;1;1) \in G \Rightarrow (1;0;1) + (0;1;1) = (1;1;2) \notin G$

Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $H = \{ (x ; y ; z) \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \}$

$(x_1 ; 2x_1 ; 3x_1) ; (x_2 ; 2x_2 ; 3x_2) \in H ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1 ; 2x_1 ; 3x_1) + \beta(x_2 ; 2x_2 ; 3x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 ; 2(\alpha x_1 + \beta x_2) ; 3(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in H$

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont B, C, E et H

1.2.7 Soit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soient f, g deux fonctions réelles paires ; $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ est paire

Donc l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soient f, g 2 fonctions réelles impaires $\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ et $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f + \beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ est impaire.

Donc l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel.