Applications linéaires

1) Applications linéaires :

Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : E \to F$ une application de E vers F.

h est dite linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $\forall u, v \in E$
- $h(\alpha u) = \alpha h(u)$, $\forall u \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

* Remarques :

a) Une application linéaire est également appelée un homomorphisme

b) Toute application linéaire $h : V \to V$ d'un espace vectoriel V dans lui-même est appelé un endomorphisme

* Théorème 1 :

Soit $h : E \to F$ une application d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.

i) Si h est linéaire, alors $h(0_E) = 0_F$

ii) h linéaire $\Leftrightarrow h(\alpha u + \beta v) = \alpha h(u) + \beta h(v)$, $\forall u, v \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* Théorème 2 :

Soient E et F deux espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n)$ une base de E.

i) Si $h : E \to F$ application linéaire, $h(u) \in \langle h(e_1) ; h(e_2) ; \dots ; h(e_n) \rangle$ pour tout $u \in E$

ii) Pour toute famille $(f_1 ; f_2 ; f_3 ; \dots ; f_n)$ de F, il existe une application linéaire $h : E \to F$ telle que $h(e_k) = f_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$

2) Matrice d'une application linéaire :

Soient $h : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}_E = (e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_n)$ une base de E ainsi que $\mathcal{B}_F = (f_1 ; f_2 ; \cdots ; f_n)$ une base de F.

Relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, l'application linéaire s'écrit :

$$h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où la K-ième colonne $\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ \vdots \\ h_{pk} \end{pmatrix}$ est formée des composantes de $h(e_k)$ dans $\mathcal{B}_F$.

* $H = (h_{ij}) \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ est appelée la matrice de h relativement aux base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$

3) Opérations sur les applications linéaires :

* Théorème 3 : (somme et produit par un scalaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F, ainsi que E et F les matrices de f et g relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Somme : $f + g : E \to F$, définie par $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$, est linéaire.
$F + G$ matrice de $f + g$ relativement à $\mathcal{B}_E + \mathcal{B}_F$.

Produit par un scalaire : $\alpha f : E \to F$, définie par $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$ est linéaire.
αF matrice de αf relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Espace vectoriel des applications linéaires : L'ensemble des applications linéaires de E vers F, notée $Hom(E ; F)$ muni des opérations ci-dessus est un espace vectoriel.

* **Théorème 4 :** (composée)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels munis de bases respectives B_E, B_F et B_G, ainsi que $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires.

i) la composée $g \circ f : E \to F$, définie par $(g\circ f)(u) = g(f(u))$, est linéaire

ii) Si F est la matrice de f relativement à B_E et B_F et G est la matrice de g relativement à B_F et B_G, alors GF est la matrice de $g\circ f$ relativement à B_E et B_G.

* **Théorème 5 :**

Soient $B_E = (e_1; e_2; \cdots; e_n)$ une base de E et $B_F = (f_1; f_2; \cdots; f_n)$ une base de F, ainsi que $H = (h_{ij}) \in M_{p\times n}$.

L'application définie $h : E \to F$ définie par

$$h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \\ h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui se note $h : X \mapsto Y = HX$ est linéaire.

4) Noyau et image d'une application linéaire :

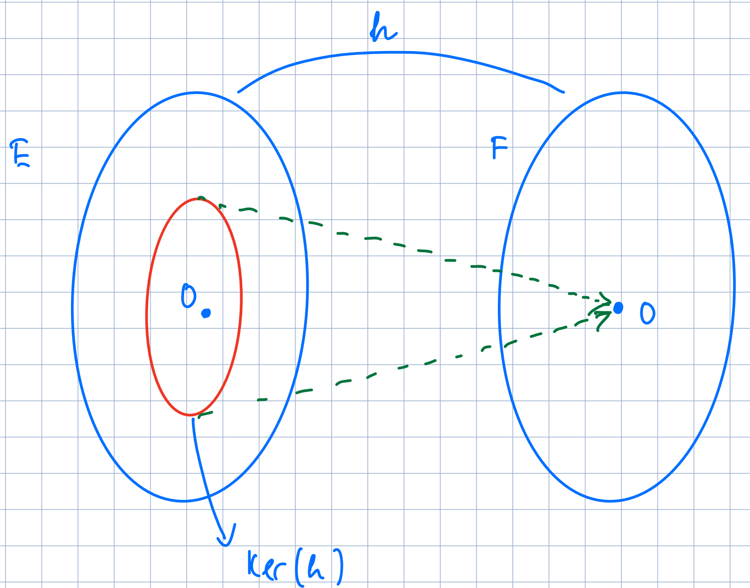
Soient E et F deux espaces vectoriels et $h : E \to F$ une application linéaire.

Le noyau de h est l'ensemble $Ker(h) = \{ u \in E : h(u) = 0 \}$

L'image de h est l'ensemble

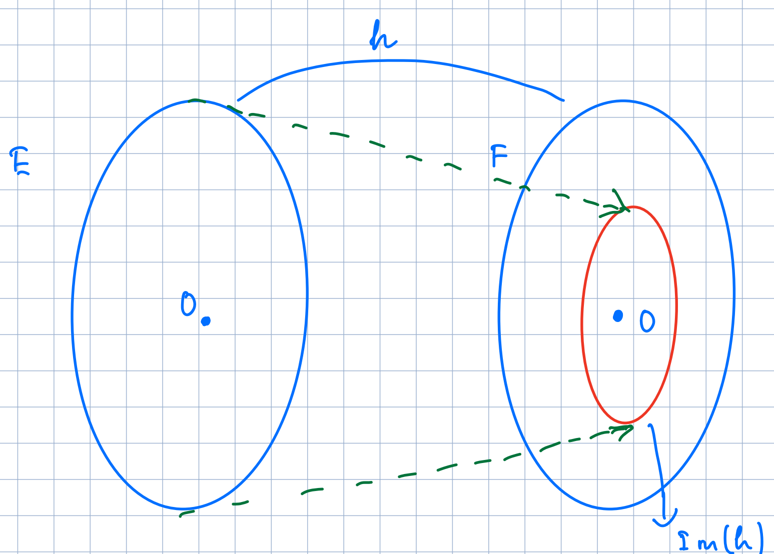
$$Im(h) = \{ v \in F : \text{il existe } u \in E \text{ avec } h(u) = v \}$$

* soit $h : E \to F$ une application linéaire



=> on appelle **noyau de h**, noté $\ker(h)$, l'ensemble des $u \in E$ tels que $h(u) = 0$ (figure ci-dessus).

* soit $h : E \to F$ une application linéaire



Remarque :

Dans le cas des fcts "classiques" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\ker(h)$ correspondrait aux zéros de la fct f
- $\mathrm{Im}(h)$ correspondrait à $\mathrm{Im}(f)$

=> on appelle **image de h**, noté $\mathrm{Im}(h)$, l'ensemble des $v \in F$ tels qu'il existe $u \in E$ avec $h(u) = v$ (figure ci-dessus).

* **Théorème 6** :

Soit $h : E \to F$ une application linéaire.

i) $\ker(h)$ est un sous-espace vectoriel de E.

ii) $\mathrm{Im}(h)$ est un sous-espace vectoriel de F.

iii) Théorème du rang :

Si E est de dimension finie, on a :

$$\boxed{\dim(\ker(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(E)}$$

Le rang r d'une application linéaire est la dimension de l'image :

$$\boxed{r = \dim(\mathrm{Im}(h))}$$

iv) Soit A un sous-espace vectoriel de E.

L'image $h(A) = \{ w \in F \mid \exists u \in A \text{ avec } h(u) = w \}$ de A par h est un sous-espace vectoriel de F.

v) Générateurs de l'image d'une application linéaire

Si $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_n)$ base de E, alors

$$\boxed{\mathrm{Im}(h) = \langle h(e_1) ; h(e_2) ; \cdots ; h(e_n) \rangle}$$

* **Remarque** :

Soit $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_n)$ base de E et $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in E$, on a :

$$h(u) = 0 \iff h(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = 0$$

$$\iff \alpha_1 h(e_1) + \alpha_2 h(e_2) + \cdots + \alpha_n h(e_n) = 0$$

Donc en déterminant le noyau de h, on teste si les générateurs $(h(e_1) ; h(e_2) ; \cdots ; h(e_n))$ de l'image de h forment une famille libre. On pourra donc déduire rapidement du calcul du noyau une base de l'image de h.

5) Applications linéaires injectives, surjectives et bijectives

Soit $h : D \to A$ une application d'un ensemble de départ D vers un ensemble d'arrivée A.

- f est injective si $\forall x_1, x_2 \in D$, $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$
- f est surjective si $Im(f) = A$, donc si $\forall a \in A, \exists d \in D$ avec $f(d) = a$
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective
(one to one)

* Propriétés d'une bijection :

$f : D \to A$ bijective $\Leftrightarrow$ $\exists g : A \to D$ telle que $(g \circ f)(x) = x \; \forall x \in D$
et $(f \circ g)(y) = y \; \forall y \in A$.

g est la réciproque de f et est notée f^{-1}.

* Théorème 7

Soit $h : E \to F$ une application linéaire.

i) h est injective $\Leftrightarrow$ $Ker(h) = \{0_E\}$

ii) Si E et F sont de même dimension finie, les affirmations suivantes sont équivalentes :

•) h est injective

••) h est surjective

•••) h est bijective

Une application linéaire $h : E \to F$ bijective est appelée un isomorphisme.

Un endomorphisme $h : E \to E$ bijectif est appelé un automorphisme.

* **Théorème 8**

i) Soit un endomorphisme $h : E \to E$ d'un espace vectoriel E de dimension finie.

h est un automorphisme $\Leftrightarrow \ker(h) = \{0_E\}$

ii) Si $h : E \to F$ est un isomorphisme, alors la réciproque h^{-1} est également un isomorphisme.

Résumé : On dit qu'une application linéaire $h : E \to F$ est

a) injective si deux vecteurs différents ont des images différents

b) surjective si $Im(h)$ atteint tout l'espace d'arrivée F

c) bijective (ou bien automorphisme) si $E = F$ et que h est inversible

* Rappel :

Soit A une matrice de type $m \times n$

=> On appelle transposée de A, la matrice notée A^T (de type $n \times m$) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A

=> **Théorème 9**

Soit A une matrice, alors $rang(A) = rang(A^T)$

=> soit $h : E \to F$ une application linéaire définie par $h(u) = Au$

alors : $\boxed{\dim[Im(h)] = rang(A)}$ (comme théorème 6)

Théorème 10

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors :

A est inversible $\Leftrightarrow$ l'application linéaire est bijective $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$(u \to Au)$