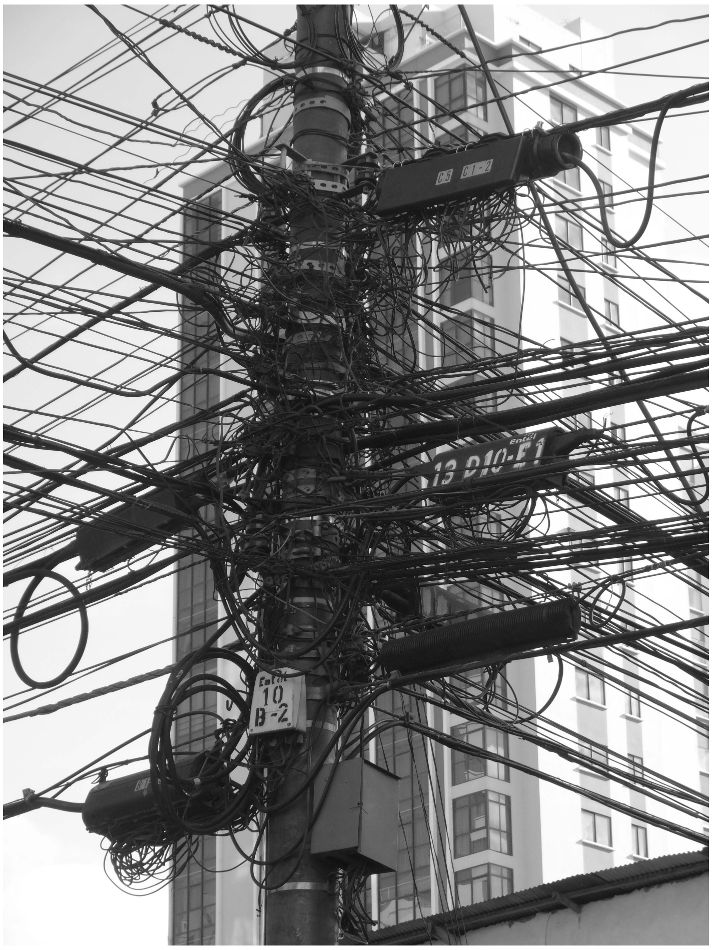
MATHÉMATIQUES III

École de maturité

Niveau renforcé



GYMNASE DE BURIER

Table des matières

v. 2.0 – Juin 2023

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Calcul matriciel

1.1.1 Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : AB, AC, $AB+AC$, $B+C$, $A(B+C)$, $A+B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, $A^2+2AB+B^2$, C^2, C^3 et C^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1.1.3 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

1.1.4 Soit A une matrice de type 3×7, B une matrice de type 7×3 et C une matrice de type 7×7. De quel type sont les matrices suivantes ?

a) $(A \cdot B) \cdot C$

b) $B \cdot (A \cdot C)$

c) $C \cdot (B \cdot A)$

d) $(A \cdot C) \cdot B$

1.1.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $(AB)(AB) = AB$.

1.1.6 Soit α, β, γ, δ des nombres réels, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA$.

1.1.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $AB \neq 0$ et $BA = 0$.

1.1.8 Vérifier que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

1.1.9 On considère les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : N^n, U^n, R^n et T^n.

1.1.10 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : $A \cdot B$, ${}^tA \cdot B$, ${}^t(A \cdot B)$, ${}^tB \cdot {}^tA$ et ${}^tB + {}^tA$.

1.1.11 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 10 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 1 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 18 \\ 4x - 7y + z - 6t = -5 \\ x + y - z + t = 1 \end{cases}$

1.1.12 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -2x+5y+2z=1 \\ 8x+y+4z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \\ -3x+5y+4z=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x-y+4z=2 \\ 4x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$

1.1.13 Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

1.1.14 Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que si $abc \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.15 Résoudre les systèmes suivants à l'aide d'un calcul d'inverse de matrice :

a) $\begin{cases} 2x+2y+3z=5 \\ x+z=-2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5y+4z=3 \\ 4x+5y+4z=0 \\ -x-y-z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-2z=5 \\ 3x+5y+z=10 \end{cases}$

1.2 Espaces vectoriels

1.2.1 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha; u) \longmapsto 0$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x;y) + (x';y') \longmapsto (x+x';y+y')$$

$$\alpha(x;y) \longmapsto (\alpha x;y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

1.2.3 On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

des opérations usuelles :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Prouver que, muni des deux opérations ci-dessus, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ; préciser l'élément neutre de l'opération + et l'opposé d'une matrice donnée.

1.2.4 Si V est un espace vectoriel, $u, v \in V$, parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $\dfrac{u}{3}$

b) $\dfrac{u+v}{2} - u$

c) $u - 4$

d) $\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$

e) $u^2 - 2u + 1$

f) $2u - 3uv$

1.2.5 Soit T l'ensemble des applications de $[0; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = a\cos(x) + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble T, muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x; y; z) | x = 12\}$

$B = \{(x; y; z) | z = 0\}$

$C = \{(x; y; z) | y = 3x\}$

$D = \{(x; y; z) | 2x + y + z = 21\}$

$E = \{(x; y; z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$

$F = \{(x; y; z) | xy = z\}$

$G = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 = z^2\}$

$H = \left\{(x; y; z) | x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}\right\}$

1.2.7 Soit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.8 a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

b) $B = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$?

1.2.9 Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_I$ des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_I$.

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x;y;z;t)|x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1.2.11 Soit A_α le sous-ensemble de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions affines f telles que $f(\alpha) = 0$ (où α est un nombre réel). Montrer que A_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.12 Montrer que les familles suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont libres :

a) $\big((1;-1;1);(0;2;-1)\big)$

b) $\big((0;1);(1;1)\big)$

c) $\big((2;1;0);(0;1;-1)\big)$

d) $\big((-1;3);(0;2)\big)$

e) $\big((\pi;0);(0;e)\big)$

f) $\big((2;4);(2;5)\big)$

g) $\big((1;1;0);(1;1;1);(0;-1;1)\big)$

h) $\big((0;1;1);(0;1;3);(1;3;5)\big)$

1.2.13

a) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $(1;2;-1)$, $(1;-1;3)$ et $(m;-1;2)$, où m est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m forment-ils une famille liée ?

b) Même question avec les vecteurs $(m;2;1)$, $(2;m;3)$ et $(1;2;1)$.

1.2.14 Soit u et v deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $(u;v)$ est une famille libre lorsque $(u(x);v(x))$ est égale à :

a) $(1;x)$ b) $(x;x^2)$ c) $(x;x^4)$ d) $(e^x;x)$

e) $(xe^x;e^{2x})$ f) $(\sin(x);\cos(x))$ g) $(x;\sin(x))$ h) $(\sin(x);\sin(2x))$

1.2.15 Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, la famille $(f_1; f_2; ...; f_n)$ d'éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ définis par $f_k(x) = \sin(kx)$ pour $k = 1, 2, ..., n$ est libre.

1.2.16 Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et f, g, h trois éléments de $\mathcal{F}_A$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille $(f; g; h)$ est-elle libre ?

1.2.17 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1; 1)$ $\quad e_2 = (1; 0)$ $\quad u = (0; 1)$

b) $e_1 = (1; 1)$ $\quad e_2 = (-1; 1)$ $\quad u = (1; 3)$

1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1; 1; -1)$ $\quad e_2 = (1; -1; 0)$ $\quad e_3 = (1; 0; 1)$ $\quad u = (0; 1; 0)$

b) $e_1 = (1; -1; 0)$ $\quad e_2 = (0; 1; -1)$ $\quad e_3 = (1; 0; 2)$ $\quad u = (1; 1; 1)$

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est une base de P_2. Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x - 1)^2$.

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

1.2.21 Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

$$\text{a)} \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x;y;z;t) | x+y=z-t=0\}$$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

a) le vecteur $(2;1;3;2)$,

b) les vecteurs $(2;1;0;3)$ et $(1;-2;1;0)$,

c) les vecteurs $(2;0;1;0)$, $(0;0;1;3)$ et $(0;1;1;0)$.

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x;y;z;t) \mid y+z+t=0\}, \quad G = \{(x;y;z;t) \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad z=2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et $F \cap G$.

1.2.25 Soit $(e_1;e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(e_2;e_1)$, $(e_1;e_1+e_2)$, $(e_1-e_2;e_1+e_2)$ et $(e_1+\alpha\cdot e_2;e_2)$ sont aussi des bases de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les composantes de e_1 et de e_2 relativement à chacune de ces bases.

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\{(3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3)\}$$

1.2.27 Soit $(e_1;e_2;e_3;e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4$ $\qquad$ $u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$

$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4$ $\qquad$ $u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$

Extraire de la famille $(u_1;u_2;u_3;u_4)$ une base de U.

1.2.28 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme ax^3+bx^2+cx+d, où a, b, c, d sont des nombres réels. Calculer la dimension du sous-espace

$$\langle 4x^2-x+2; 2x^2+6x+3; -4x^2+10x+2 \rangle$$

dans P_3.

1.2.29 Soit $F = \langle(1;3;-3;-1;-4);(1;4;-1;-2;-2);(2;9;0;-5;-2)\rangle$ et $G = \langle(1;6;2;-2;3);(2;8;-1;-6;-5);(1;3;-1;-5;-6)\rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$.

1.2.30 Soit u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $(u;v)$ est une famille libre, alors $\mathbb{R}^2$ est somme directe des sous-espaces engendrés par u et v respectivement.

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B. Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.

a) $A = \{(x;y;y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a;a;a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \{(x;y;y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a;a;-a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \{(x;y;-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a;2a;b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1.2.32 Dans l'espace vectoriel réel $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $M_{2\times2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

1.2.33 a) Prouver que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Trouver une base de F.

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel G engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une base de $F \bigcap G$.

1.2.34 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim(\langle A;B;C;D \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

1.2.35 Dans P_3, on considère les polynômes

$$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad p_3 = t^3 + 6t - 5 \quad \text{et} \quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$$

Calculer $\dim(\langle p_1;p_2;p_3;p_4 \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

1.2.36 Montrer que les sous-espaces des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.37 Déterminer, en fonction de α et de β le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h((x;y)) = x+y$

b) $h((x;y)) = xy$

c) $h((x;y)) = (2x-y;x)$

d) $h((x;y)) = (x+1;y)$

e) $h((x;y)) = (x;y;x-y)$

f) $h((x;y;z)) = (x+2y;z-2y)$

g) $h((x;y;z)) = (0;x;2x)$

h) $h((x;y)) = (x^2;x+y)$

i) $h((x;y)) = (\sin(x);y)$

j) $h((x;y;z)) = (x-z;2z-2x)$

1.3.2 Pour les applications linéaires de l'exercice précédent, déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques.

1.3.3 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $h\left((-2;1)\right) = (3;5)$ et $h\left((1;3)\right) = (-1;2)$. Trouver la matrice H de h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.3.4 Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $(e_1;e_2)$ et $u = xe_1 + ye_2$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a) $h(u) = 3u$

b) $h(u) = u + (x-y)e_2$

Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $(e_1;e_2;e_3)$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$?

c) $h(u) = xe_1 + ye_2 + e_3$

d) $h(u) = ye_1 - xe_2$

1.3.5 Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de P_2 ?

a) $h(ax^2+bx+c) = ax^2$

b) $h(ax^2+bx+c) = cx^2+bx+a$

1.3.6 Un endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ envoie $(2;-1)$ sur $(1;1)$ et $(0;2)$ sur $(3;1)$.
Former la matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'image de $u=(-4;1)$ par g, ainsi que son image réciproque par g.

1.3.7 Les applications h, de $\mathcal{D}_{[a;b]}$ vers $\mathcal{F}_{[a;b]}$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h(f)=f'$

b) $h(f)=f'-f^2$

c) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=f(a)$

d) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=f(b)+1$

e) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=\int_a^x f(t)dt$

f) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=\int_a^x f(t)dt+3$

g) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=e^{f(x)}$

h) $h(f)=g$ où g est définie par $g(x)=f(x)e^x$

1.3.8 Soit l'application linéaire définie par $h\left((x;y;z)\right)=(x-y;x+5y)$.

a) Déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice $H^\star$ de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1^\star=((0;1;1),(1;0;1),(1;0;0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2^\star=((-3;-4),(4;5))$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^\star$ de $u=(-1;5;6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^\star$.

1.3.9 Déterminer le noyau et l'image d'un homomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $H=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

1.3.10 Donner la matrice, le noyau et l'image relativement aux bases canoniques des applications linéaires de l'exercice 1.3.1.

1.3.11 Déterminer la matrice, le noyau et l'image relativement à la base donnée, de chacun des endomorphismes des exercices 1.3.4.

1.3.12 P_2 est muni de la base $(1;x;x^2)$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image relativement à la base donnée, de chacun des endomorphismes de l'exercice 1.3.5.

1.3.13 Reprendre l'exercice 1.3.7 et déterminer :

en a) le noyau et l'image de h,

en e) le noyau et l'image de h,

en h) le noyau de h.

1.3.14 Munissons $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leur base canonique et donnons les matrices des applications linéaires f, g, h et i :

$$\text{f} : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{g} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{h} : \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} : \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

$$m = f \circ h \ , \ p = g \circ i \ , \ q = (f + g) \circ h$$

1.3.15 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et h l'application linéaire de E vers E définie par,

$$h(e_1) = e_1 + e_2 \qquad h(e_2) = 2e_1 - e_2 \qquad h(e_3) = e_1 - 2e_2$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h. h est-elle injective, surjective ou bijective ?

1.3.16 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2)$ et h l'endomorphisme de E défini par $h(2e_1 + e_2) = 2e_1 - 3e_2$ et $h(e_1 - e_2) = 3e_1 - e_2$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h. h est-il injectif, surjectif ou bijectif ?

1.3.17 Soit $a = (1; 2)$ et $b = (3; -1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, $u = (1; 0; 1)$ et $v = (0; 1; -2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $h(a) = u$ et $h(b) = v$. h est-elle injective, surjective ou bijective ?

1.3.18 Prouver que $f\left((x; y)\right) = (2x + y; x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1.3.19 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels.

a) Soit $\varphi_a : P_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie (pour $a \in \mathbb{R}$) par $\varphi_a(P) = P(a)$. Déterminer la matrice de φ_a relativement aux bases $(1; x; x^2; x^3)$ de P_3 et (1) de $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ_a.

1.3.20 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels. Déterminer a et b pour que le rang de h soit 2 ; donner alors $\ker(h)$.

1.3.21 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$h(x; y; z) = (x + 2\,y - z;\; y + z;\; x + y - 2\,z)$$

a) Trouver une base de l'image de h.

b) Trouver une base du noyau de h.

1.3.22 On considère l'application linéaire :

$$f(x_1;\, x_2;\, x_3;\, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4;\; x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4)$$

a) Quelle est la matrice F de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$?

b) Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ?

c) Déterminer l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

d) Soit y_1 , y_2 deux réels, déterminer un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = (y_1;\, y_2)$.

1.3.23 On considère l'application linéaire f dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base du noyau de f.

b) Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

1.3.24 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels. Soit $B = (1, x, x^2)$ la base canonique de P_2.
Considérons l'application d de P_2 dans P_2 définie par $d(P) = (x + 1)\,P'$, où P' est la dérivée de P par rapport à x.

a) Montrer que d est un endomorphisme.

b) Déterminer la matrice D de d par rapport à B.

c) Déterminer le rang de d.

d) Trouver une base de l'image de d.

e) Trouver une base de noyau de d.

1.4 Déterminants et matrices inverses

1.4.1 Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-x & c \\ b & d-x \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$

1.4.2 Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

1.4.3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

1.4.4 Calculer et factoriser en utilisant les propriétés du déterminant :

a) $\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \ln(x) & \ln(y) & \ln(z) \\ \ln(2x) & \ln(2y) & \ln(2z) \\ \ln(3x) & \ln(3y) & \ln(3z) \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

1.4.5 Calculer les déterminants suivants (donner la réponse sous forme de produit).

a) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & 2a-a^2 & 2b-b^2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}$

1.4.6 On considère l'ensemble des points d'un plan dans lequel on a choisi une origine O et une base $(i; j)$.

a) Montrer que les points $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ et $A_3(x_3; y_3)$ sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) On donne trois droites deux à deux sécantes :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ , \ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ , \ a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Prouver qu'elles sont concourantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

1.4.7 Soit M une matrice carrée d'ordre n telle que ${}^tM\,M = I_n$. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

1.4.8 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

h) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs $u = (2; 1)$, $v = (-1; 1)$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

a) $(e_1 + e_2; 3e_2)$ b) $(u; v)$

1.4.10 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2; e_3)$, on considère les vecteurs

$$u = (1;1;1), \quad v = (1;1;0)$$

et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2; e_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

a) $(e_3; e_2; e_1)$ b) $(u; v; e_1)$

1.4.11 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathcal{B}^\star = ((0;1;1); (1;0;1); (1;1;0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $F^\star$ de f relativement à $\mathcal{B}^\star$.

1.4.12 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des nombres réels. On considère la base $B = (1; x; x^2; x^3)$ de P_3, ainsi que l'application $f : P_3 \longrightarrow P_3$ qui à toute fonction fait correspondre sa dérivée.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de P_3.
b) Écrire la matrice A de f relativement à B.
c) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
d) Montrer que $B' = (1 + x; x(x-2); x(x-1); x(x-1)(x-2))$ est une base de P_3.
e) Écrire la matrice de passage de B à B', ainsi que la matrice de f relativement à la base B'.

1.4.13 On considère l'endomorphisme $h_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$H_k = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & k-3 \\ 5 & k-1 & 3 \\ 7 & k+3 & 1 \end{pmatrix}$$

où k est un paramètre réel.

a) Pour quelles valeurs du paramètre k l'endomorphisme h_k est-il un automorphisme ?
b) On suppose que $k = 3$:

b_1) Soit $e_1^\star = (1;-1;-1)$; prouver que $(e_1^\star)$ est une base de $\mathrm{Ker}(h_3)$.

b_2) Soit $e_2^\star = (1;-8;0)$ et $e_3^\star = (0;3;1)$; prouver que $(e_2^\star; e_3^\star)$ est une base de $\mathrm{Im}(h_3)$.

b_3) Prouver que $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star; e_2^\star; e_3^\star)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $H_3^\star$ de h_3 relativement à la base $\mathcal{B}^\star$.

1.5 Diagonalisation des endomorphismes

1.5.1 Le scalaire $\lambda = 2$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

1.5.2 Le scalaire $\lambda = -2$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$?

1.5.3 Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.4 Le vecteur $\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.5 Le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.6 Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.7 Le scalaire $\lambda = 4$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

1.5.8 Le scalaire $\lambda = 3$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

1.5.9 Déterminer, pour chacune des valeurs propres indiquées, une base du sous-espace propre associé.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

b) $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 10$.

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$.

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$.

h) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

1.5.10 On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer la matrice de changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme ; donner également la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

1.5.11 Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h((x;y)) = (-y;x)$ n'admet aucun vecteur propre.

1.5.12 Montrer qu'une matrice symétrique d'ordre 2 est diagonalisable.

1.5.13 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 2 et -3, et les espaces propres $E_2 = \Delta((2;-1))$ et $E_{-3} = \Delta((3;1))$. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.5.14 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 1 et 4, et les espaces propres $E_1 = \Delta((1;-1;1))$ et $E_4 = \Pi((1;0;1);(0;1;1))$. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.5.15 Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des matrices :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.16 Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ possédant les caractéristiques suivantes :

a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $E_1 = \Delta((1;-1))$, $E_2 = \Delta((3;-2))$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $E_3 = \Delta((2;1))$, $E_{-3} = \Delta((1;2))$, $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $E_0 = \Delta((2;3))$, $E_7 = \Delta((1;-2))$, $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\lambda_1 = 3$, $E_3 = \Pi((1;0);(0;1))$, $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 10$, $E_{-10} = \Delta((2;4;-5))$, $E_{10} = \Pi((2;1;0);(1;0;1))$,

$$M' = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

f) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $E_0 = \Pi((1;0;1);(0;1;0))$, $E_5 = \Delta((2;1;1))$,

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

g) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $E_1 = \Pi((0;1;1);(1;2;-1))$, $E_2 = \Delta((1;2;0))$,

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $E_0 = \Delta((1;1;1))$, $E_4 = \Pi((-1;1;0);(-1;0;1))$,

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5.17 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h_m de matrice

$$\begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & \frac{4-3m}{2} \end{pmatrix}$$

où m est un nombre réel.

a) Étudier, selon les valeurs de m, $\mathrm{Im}(h_m)$ et $\ker(h_m)$.

b) Pour quelles valeurs de m, h_m est-il une projection vectorielle ?

c) Pour quelles valeurs de m, h_m est-il une symétrie vectorielle ?

1.5.18 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h_α de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

où α est un nombre réel.

a) Déterminer α pour que h_α ne soit pas bijectif.

b) Déterminer α pour que h_α soit une projection vectorielle.

c) Déterminer α pour que h_α soit une symétrie vectorielle.

1.5.19 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

a) Déterminer a et b pour que h soit une symétrie vectorielle.

b) Déterminer a et b pour que $\mathrm{Im}(h)$ soit de dimension 2 ; donner alors $\ker(h)$.

1.5.20 Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique.

a) Vérifier que $(1; -1)$ et $(1; -2)$ sont deux vecteurs propres de f, puis en déduire les valeurs propres associées.

b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres. Calculer P^{-1}.

c) On note A' la matrice de f relativement à la base des vecteurs propres. Écrire A', puis exprimer la matrice A en fonction des matrice P, P^{-1} et A'.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = P(A')^n P^{-1}$, puis calculer A^n.

1.5.21 a) Démontrer que si λ est une valeur propre d'un endomorphisme h d'un espace vectoriel E, λ^n est une valeur propre de l'endomorphisme $h^n = h \circ h \circ \cdots \circ h$.

b) Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $h^k = \mathrm{id}_E$. Que peut-on dire des valeurs propres de h ?

1.6 Solutions des exercices

1.1.1

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$, BA n'existe pas

b) $AB = (32)$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.1.2 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB + AC = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A(B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,
$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 12 \\ -2 & 9 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,
$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.3 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1.1.4

a) Aucun type, le calcul n'est pas possible ;

b) 7×7 ;

c) 7×7 ;

d) 3×3.

1.1.5 –

1.1.6 –

1.1.7 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$.

1.1.8 –

1.1.9 $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $n > 2$;

$U^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + ac\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$R^{3k-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R^{3k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R^{3k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.10 $AB = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tAB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

${}^tA{}^tB = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

${}^tA +{}^t B$ est impossible à calculer, car les dimensions de A et de B sont différentes.

1.1.11 a) $\{(1;2;3)\}$; b) $\{(-1;4;5)\}$, c) $\{(1;-1;2;3)\}$.

1.1.12 a) $\{\alpha(7;16;13)\}$; b) $\left\{\left(-\frac{1}{7};\frac{1}{7};0\right) + \alpha\left(-\frac{3}{7};-\frac{4}{7};1\right)\right\}$, c) $\emptyset$, d) $\emptyset$, e) $\{\alpha(1;0;-4;-3) + \beta(0;1;5;2)\}$, f) $\emptyset$.

1.1.13 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

1.1.14 –

1.1.15 a) $\{(-1;5;-1)\}$; b) $\{(-3;8;-7)\}$, c) $\{(2;1;-1)\}$.

1.2.1 Non, car $1 \cdot u \neq u$.

1.2.2 On a $(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

1.2.3 $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

1.2.4 a) oui, b) oui, c) non, d) non, e) non, f) non

1.2.5 -

1.2.6 Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont B, C, E et H.

1.2.7 -

1.2.8 a) oui, b) oui, c) non

1.2.9 -

1.2.10 -

1.2.11 -

1.2.12 -

1.2.13 a) $m = \dfrac{2}{5}$; b) $m = 1$ ou $m = 6$.

1.2.14 -

1.2.15 -

1.2.16 Non, car $2f - g - 2h = 0$.

1.2.17 a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.18 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.19 $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -4 \end{pmatrix}$.

1.2.20 -

1.2.21 a) $\dim(S) = 2$, base : $((3;1;0);(-1;0;1))$; b) $\dim(S) = 1$, base : $((4;-5;1))$.

1.2.22 $((1;-1;0;0);(0;0;1;1))$.

1.2.23 a) $((2;1;3;2);(1;0;0;0);(0;1;0;0);(0;0;1;0))$;
b) $((2;1;0;3);(1;-2;1;0);(0;1;0;0);(0;0;1;0))$;
c) $((2;0;1;0);(0;0;1;3);(0;1;1;0);(0;0;0;1))$.

1.2.24 $\dim(F) = 3$, base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(G) = 2$, base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(F \cap G) = 1$, base : $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

1.2.25 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.26 Par exemple $((3; 2; -2); (7; -3; 1))$.

1.2.27 Par exemple $(u_1; u_2)$.

1.2.28 $\dim(\langle 4x^2 - x + 2; 2x^2 + 6x + 3; -4x^2 + 10x + 2\rangle) = 3$.

1.2.29 $\dim(F + G) = 3$ et $\dim(F \cap G) = 2$.

1.2.30 -

1.2.31 a) $A + B \neq \mathbb{R}^3$, donc non somme directe ; $A \cap B = B$

b) $A \oplus B = \mathbb{R}^3$

c) $A + B = \mathbb{R}^3$, somme non directe ; $A \cap B = \{(a; 2a; -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

1.2.32 -

1.2.33 a) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $F \bigcap G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

1.2.34 $\dim(\langle A; B; C; D\rangle) = 2$, base du supplémentaire : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

1.2.35 $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4\rangle) = 2$, base du supplémentaire : $(t; 1)$.

1.2.36 -

1.2.37 Si $\alpha = \frac{-7}{5}$ et $\beta = \frac{-2}{5}$, alors le rang de A est égal à 2.
Sinon, le rang de A est égal à 3.

1.3.1 a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non ; e) oui ; f) oui ; g) oui ; h) non ; i) non ; j) oui.

1.3.2 a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

f) $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

j) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.3.3 $H = \begin{pmatrix} -\frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{13}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$

1.3.4 a) oui ; b) oui ; c) non ; d) oui.

1.3.5 a) oui ; b) oui.

1.3.6 $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $g((-4;1)) = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ et ${}^{r}g((-4;1)) = \left((7; -\frac{17}{2})\right)$

1.3.7 a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non ; e) oui ; f) non ; g) non ; h) oui.

1.3.8 a) $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $H^\star = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^\star}$; $h(u) = \begin{pmatrix} -126 \\ -96 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^\star}$

1.3.9 $\mathrm{Ker}(h) = \{(2k;k) \mid k \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Im}(h) = \{(-4t;5t;-6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

1.3.10

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Delta((1;-1))$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \{(0;0)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \{(0;0)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \Pi((1;0;1),(0;1;-1))$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Delta((-2;1;2))$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Pi((0;1;0),(0;0;1))$, $\mathrm{Im}(h) = \Delta((0;1;2))$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Pi((1;0;1),(0;1;0))$, $\mathrm{Im}(h) = \Delta((1;-2))$

1.3.11

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \{(0;0)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Delta((0;1))$, $\mathrm{Im}(h) = \Delta((1;1))$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker(h) = \Delta((0;0;1))$, $\mathrm{Im}(h) = \Pi((1;0;0),(0;1;0))$

1.3.12

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(h) = \{bx + c | b, c \in \mathbb{R}\} = \Pi((1;0;0),(0;1;0)) \\ \mathrm{Im}(h) = \{ax^2 | a \in \mathbb{R}\} = \Delta((0;0;1)) \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(h) = \{0\} \\ \mathrm{Im}(h) = P_2 \end{array}$

1.3.13

a) $\ker(h)$ est l'ensemble des fonctions constantes et $\mathrm{Im}(h)$ est l'ensemble des fonctions qui admettent une primitive ; e) $\ker(h) = \{x \longmapsto 0\}$ et $\mathrm{Im}(h) = \{g \in \mathcal{D}^2_{[a;b]} | g(a) = 0\}$; h) $\ker(h) = \{x \longmapsto 0\}$.

1.3.14

$M_m = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(m) = \Delta((1;1)) \\ \mathrm{Im}(m) = \Delta((5;-8)) \end{array}$

$M_p = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(p) = \Delta((3;1)) \\ \mathrm{Im}(p) = \Delta((1;-5)) \end{array}$

$M_q = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(q) = \{(0;0)\} \\ \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^2 \end{array}$

1.3.15

$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(h) = \Delta((1;-1;1)) \\ \mathrm{Im}(h) = \Pi((1;0;0),(0;1;0)) \\ h \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.} \end{array}$

1.3.16

$H = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(h) = \{(0;0)\} \\ \mathrm{Im}(h) = E \\ h \text{ est bijective.} \end{array}$

1.3.17

$H = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \ker(h) = \{(0;0)\} \\ \mathrm{Im}(h) = \Pi((1;0;1);(0;1;-2)) \\ h \text{ est injective, mais n'est ni surjective, ni bijective.} \end{array}$

1.3.18 -

1.3.19 a) $F_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$; b) $\ker(\varphi_a) = \{(x-a)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Im}(\varphi_a) = \mathbb{R}$.

1.3.20 $a = 1$ et b quelconque. $\ker(h) = \Delta((1;b;-1))$.

1.3.21 a) $((1;0;1),(0;1;-1))$

b) $((3;-1;1))$

1.3.22 a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\ker(f) = \langle((1;\ -2;\ 1;\ 0), (2;\ -3;\ 0;\ 1))\rangle$
Le noyau de f n'est par réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}^4$. Donc f n'est pas injective.

c) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est surjective.

d) $f(y_2 - y_1;\ 2\,y_1 - y_2;\ 0;\ 0) = (y_1;\ y_2)$

1.3.23 a) $\ker(f) = \langle((-3;\ 1;\ 1;\ 0))\rangle$

b) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Le rang de la matrice A est égal à 3.

1.3.24 a) -

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Le rang de d est égal à 2.

d) $\text{Im}(d)$ est engendré par $d(x) = 1 + x$ et $d(x^2) = 2\,x + 2\,x^2$, cette famille constitue une base de $\text{Im}(d)$.

e) Le noyau est engendré par le polynôme 1.

1.4.1 a) 8 ; b) 11 ; c) $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$; d) $\lambda^2 - 7\lambda + 2$; e) $2m - 4$.

1.4.2 a) 79 ; b) 24 ; c) -5 ; d) 8 ; e) 12 ; f) 178.

1.4.3 27 et 86.

1.4.4 a) 0 ; b) $(x-1)(x-a)$; c) $(b-a)(c-a)(c-b)$; d) $-(t+2)(t-2)(t-4)$; e) 0 ; f) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+xz)$.

1.4.5 a) $(x+a+b)(x-a)(x-b)$

b) 0

c) a^3

1.4.6 –

1.4.7 $M^{-1} =^t M$

1.4.8

a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) non inversible

d) non inversible si $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sinon $\dfrac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$

e) non inversible f) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ h) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

i) non inversible si $m = -2$ ou $m = 1$, sinon $\dfrac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.9 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$.

1.4.10 a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.11 $F^{\star} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.12 a) - ; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\ker(f) = P_0$ et $\mathrm{Im}(f) = P_2$; d) - ; e) matrice de passage : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et matrice dans la nouvelle base : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.13 a) $k \in \mathbb{R} - \{2;3\}$
b_3) $H_3^{\star} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

1.5.1 Oui

1.5.2 Oui

1.5.3 Non

1.5.4 Oui, $\lambda = 3 + \sqrt{2}$

1.5.5 Oui, $\lambda = 0$

1.5.6 Oui, $\lambda = -2$

1.5.7 Oui, $(1;1;-1)$

1.5.8 Oui, $(3;2;1)$

1.5.9 a) $B_1 = ((0;1))$, $B_5 = ((2;1))$
b) $B_4 = ((3;2))$
c) $B_{10} = ((-1;3))$; une autre valeur propre : $\lambda = 3$, $B_3 = ((2;1))$
d) $B_1 = ((-2;3))$, $B_5 = ((-2;1))$
e) $B_{-2} = ((1;1;3))$
f) $B_1 = ((0;1;0))$, $B_2 = ((-1;2;2))$, $B_3 = ((-1;1;1))$
g) $B_3 = ((-3;0;1),(-2;1;0))$; une autre valeur propre : $\lambda = 8$, $B_8 = ((1;-1;2))$

h) $B_4 = ((0;0;0;1),(2;3;1;0))$; deux autres valeurs propres : $\lambda = 2$, $B_2 = ((-2;1;1;0))$ et $\lambda = 1$, $B_1 = ((-1;0;1;0))$

1.5.10

$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 4 \ , \ E_1 = \Delta((1;-1)) \ , \ E_4 = \Delta((2;1))$

a) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 3 \ , \ E_2 = \Delta((1;1)) \ , \ E_3 = \Delta((1;0))$

b) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \ , \ E_3 = \Delta((1;-1))$

c) A n'est pas diagonalisable

$\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 3 \ , \ E_2 = \Delta((3'592;-84;1)) \ , \ E_3 = \Delta((1;0;0))$

d) A n'est pas diagonalisable

$\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 6 \ , \ E_2 = \Pi((1;0;-1);(2;-1;0)) \ , \ E_6 = \Delta((1;1;1))$

e) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \lambda_3 = 2 \ , \ E_{-2} = \Delta((0;0;1)) \ , \ E_0 = \Delta((1;1;0)) \ , \ E_2 = \Delta((1;-1;0))$

f) $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5.11 -

1.5.12 -

1.5.13 $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.5.14 $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.15 a) projection de direction $\Delta((2;1))$ sur la droite $\Delta((1;0))$; b) symétrie de direction $\Delta((0;1))$ par rapport à la droite $\Delta((1;\sqrt{3}))$; c) affinité de direction $\Delta((2;-1))$ et de rapport 2, suivi d'une affinité de direction $\Delta((1;1))$ et de rapport 5 ; d) symétrie de direction $\Delta((2;4;-5))$ par rapport au plan $x - 2y - z = 0$; e) projection de direction $\Delta((-1;1;0))$ sur le plan $x + 2y - z = 0$; f) rotation d'axe $\Delta((0;1;0))$ et d'amplitude $\alpha = 36.87^\circ$

1.5.16 a) affinité d'axe E_1 de direction E_2 et de rapport 2 ; b) symétrie par rapport à la droite E_3 de direction E_{-3}, suivi d'une homothétie de rapport 3 ; c) projection sur E_7 de direction E_0, suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 7 ; d) homothétie centrée à l'origine et de rapport 3 ; e) symétrie par rapport au plan E_{10} de direction E_{-10}, suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 10 ; f) projection parallèle au plan E_0 sur la droite E_5, suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 5 ; g) affinité de plan E_1 de direction E_2 et de rapport 2 ; h) projection sur E_4 de direction E_0, suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 4.

1.5.17
a) si $m = 0$: $\mathrm{Im}(h_0) = \Delta((1;2))$, $\ker(h_0) = \Delta((1;1))$, si $m = \dfrac{5}{3}$: $\mathrm{Im}(h_{\frac{5}{3}}) = \Delta((2;-1))$, $\ker(h_{\frac{5}{3}}) = \Delta((3;-2))$, sinon : $\mathrm{Im}(h_m) = \mathbb{R}^2$, $\ker(h_m) = \{0\}$; b) si $m = 0$, h_0 est une projection de base $\Delta((1;2))$ et de direction $\Delta((1;1))$; c) si $m = 2$, h_2 est une symétrie de base $\Delta((1;0))$ et de direction $\Delta((1;-2))$.

1.5.18 a) h_α n'est pas bijectif si $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) h_α est une projection de base $\Delta((1;1))$ et de direction $\Delta((1;-1))$ si $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) h_α est une symétrie de base $\Delta((1;1))$ et de direction $\Delta((1;-1))$ si $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1.5.19 a) si $a = 0$ et $b = -1$; b) $a = -1$ et $\ker(h) = \Delta((1;-b;1))$.

1.5.20 a) 2 et 3 ; b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = PA'P^{-1}$; d) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$.

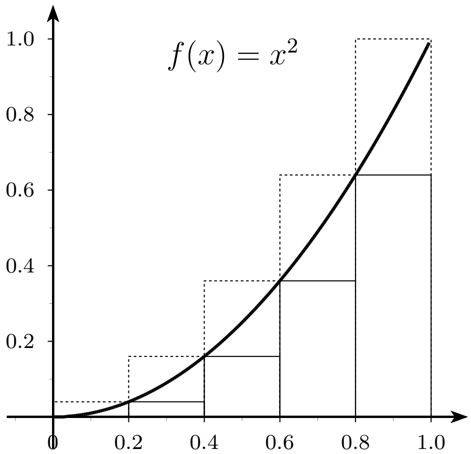
1.5.21 b) Les seules valeurs propres possibles de h sont 1 ou -1.

Chapitre 2

Analyse

2.1 Approche géométrique de l'aire sous une courbe

2.1.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.



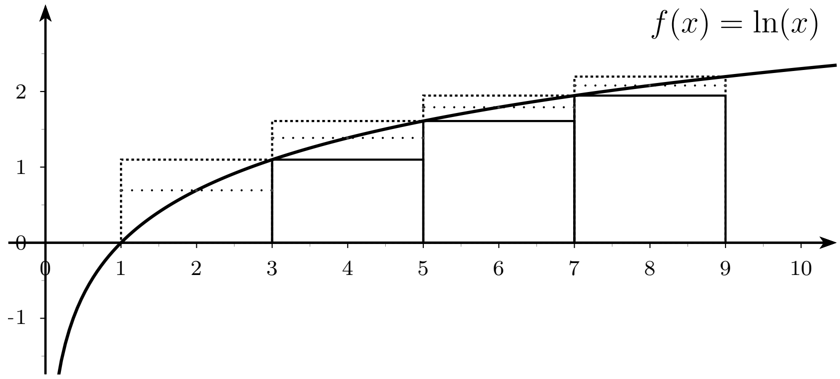
a) Estimer A à l'aide de la somme u_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme v_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

b) Améliorer l'estimation de A en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles d'égale longueur.

c) Calculer u_n et v_n en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'égale longueur.

d) Calculer la valeur exacte de A en utilisant les suites u_n, v_n et le théorème des deux gendarmes.

2.1.2 Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[1; 9]$. En subdivisant cet intervalle en quatre sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.



2.1.3 Considérer la fonction $f(x) = e^x + 1$ sur l'intervalle $[-1; 2]$. En subdivisant cet intervalle en six sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.

2.1.4 En utilisant une somme de Riemann, trouver une approximation de l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ entre les verticales $x = 0$ et $x = 2$.

2.1.5 En utilisant une somme de Riemann pour laquelle l'intervalle considéré est divisé en quatre sous-intervalles et où l'on considère le point milieu de chacun de ces sous-intervalles, trouver une valeur approximative de

$$\int_1^3 \frac{8}{x}\, dx$$

2.2 Primitives et intégrales

2.2.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

b) $F(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{2 - x^2} + 7$ et $f(x) = \dfrac{6x}{(2 - x^2)^2}$;

c) $F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$;

d) $F(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}$.

2.2.2 Vérifier les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2x}+\frac{x^2}{4}+c$, avec $c\in\mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \left(4x^2-\frac{7}{3}-\frac{14}{3x^3}\right)dx = \frac{4x^5-7x^3+7}{3x^2}+c$, avec $c\in\mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c$, avec $c\in\mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{\sqrt[3]{(x^2+7x+2)^4}}\,dx = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2+7x+2}}+c$, avec $c\in\mathbb{R}$.

2.2.3 Calculer :

a) $\displaystyle\int 3\,dx$

b) $\displaystyle\int 5x\,dx$

c) $\displaystyle\int (2x+1)\,dx$

d) $\displaystyle\int (5x-4)\,dx$

e) $\displaystyle\int (2x^2-3x+2)\,dx$

f) $\displaystyle\int 5x^3\,dx$

g) $\displaystyle\int (-3x^4)\,dx$

h) $\displaystyle\int (3x^5+2x^4-1)\,dx$

i) $\displaystyle\int (\cos(x)+\sin(x))\,dx$

j) $\displaystyle\int (1+\tan^2(x))\,dx$

2.2.4 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^3}$

c) $\displaystyle\int \frac{-7dx}{x^5}$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^4}-\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

2.2.5 Calculer :

a) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+3)^3\,dx$

d) $\displaystyle\int (2x-1)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int (7x-2)^5\,dx$

f) $\displaystyle\int (3x^2+x)^3(6x+1)\,dx$

g) $\displaystyle\int (4x^2+3)^4 x\,dx$

h) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

2.2.6 Calculer :

a) $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \sin^4(x)\,dx$

2.2.7 Calculer :

a) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{\sin(x)}\cos^3(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \sin(5x)\cos(3x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{2-\sin(x)}\,dx$

2.2.8 Calculer :

a) $\displaystyle\int (3x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^4-3x^2-7}{4x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\,dx$

e) $\displaystyle\int (2\sin(x) - 3\cos(x))\,dx$

f) $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\cos^2(x)} + 5\cos(x)\right) dx$

h) $\displaystyle\int \left(8\sin(x) + \frac{4}{\sqrt{2x}}\right) dx$

i) $\displaystyle\int (3x^2 - 7)^2\, dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2 - 5)\, dx$

k) $\displaystyle\int (3x - 5)^6\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{12}{(4 - 3x)^4}\, dx$

m) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x - 8)^2}\, dx$

n) $\displaystyle\int \frac{6}{\cos^2(3x)}\, dx$

o) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

p) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}\, dx$

2.2.9 Trouver l'expression mathématique de la fonction f, sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$, $f(5) = 54$;

b) $f''(x) = (x + 1)(x - 2)$, $f(1) = 8$, $f'(0) = 37/6$;

c) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$.

2.2.10 Déterminer la primitive F de chaque fonction f ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ et le terme constant de F est égal à 7 ;

b) $f(x) = \dfrac{18}{x^2} + \sqrt{x}$ et le graphe de F passe par le point $(9; 16)$;

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 6 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$, avec $F(0) = 1$.

2.2.11 Déterminer la fonction f sachant qu'elle admet pour asymptote la droite

$$x - 2y + 8 = 0$$

et que

$$f''(x) = -\frac{8}{x^3}$$

2.2.12 Calculer :

a) $\displaystyle\int_1^4 (x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3+3x^2+2x-1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^2 (1+2x)^3\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

2.2.13 Sachant que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 4$ et $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = -8$, calculer :

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 3f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 8f(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_3^1 2f(x)\,dx$

2.2.14 Montrer que pour une fonction f continue sur $[-a;a]$, on a :

a) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ lorsque f est paire ;

b) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ lorsque f est impaire.

2.2.15 Déterminer les réels k pour lesquels on a :

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 kx^2\,dx = \frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int_4^k (x^2-3x+7)\,dx = \frac{129}{2}$

c) $\displaystyle\int_0^{k/2} \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_k^0 \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = -\int_0^k \frac{3}{(x+3)^2}\,dx$

2.2.16 Déterminer la nature des extremums des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (t^3-t)\,dt$

b) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{t+1}\,dt$

2.2.17 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2}\,dx, \quad x = t^2 - 2$

b) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx, \quad x = 3\sin(t)$

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx, \quad x = u^2 + 1$

d) $\displaystyle\int_{a}^{2a} x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx,$ avec $a > 0, \quad x = \sqrt{a^2+t^2}$

2.2.18 Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx$

2.2.19 Calculer les intégrales définies suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{x+6}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{x}(x+2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\,\cos(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{2}^{\sqrt{20}} 3x\sqrt{x^2+5}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

h) $\displaystyle\int_{0}^{4} x\sqrt{4-x}\,dx$ (ind : par parties)

2.2.20 Calculer les intégrales suivantes en utilisant des formules trigonométriques.

a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\,\cos^2(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{\sin(x)}\,\cos^5(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \sin^2(3x)\,\cos^2(3x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \sin(x+1)\,\cos(x-1)\,dx$

e) $\displaystyle\int \sin(3x)\,\sin(4x)\,dx$

f) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\cos(3x)\,dx$

2.2.21 Calculer

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

de trois manières différentes :

a) en effectuant le changement de variable $x = u - 1$;

b) en effectuant le changement de variable $x = t^2 - 1$;

c) en effectuant une intégration par parties.

2.2.22 Calculer, si possible, les intégrales généralisées ci-dessous :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

c) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{5+y}{y^3}\,dy$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2}{x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{4} t^{-3/2}\,dt$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{z^2+1}\,dz$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

2.2.23 Calculer :

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{E(x)}{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 E\left(\frac{x^2}{x+2}\right)\,dx$

2.2.24 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, et $x = b$:

a) $f(x) = 9 - x^2, \quad a = -4,\ b = 4$;

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad a = 1,\ b = 4$;

c) $f(x) = \cos(3x), \quad a = 0,\ b = \dfrac{\pi}{2}$;

d) $f(x) = \sqrt{2x-4}, \quad a = 2,\ b = 10$.

2.2.25 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = -x^2 + 6 \mid x \mid +7$

2.2.26 Déterminer la valeur du nombre réel positif c pour que l'aire du domaine plan limité par l'axe Ox et la parabole d'équation $y = c\,(x^2 - 1)$ soit égale à 5.

2.2.27 Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g :

a) $f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = 2x$

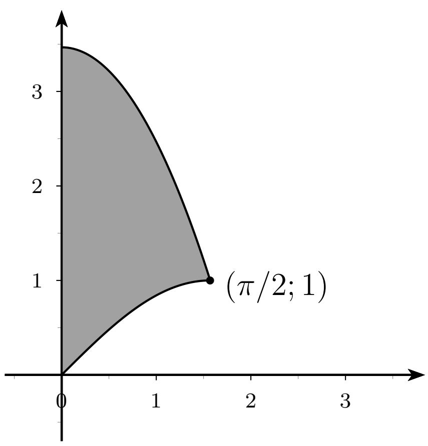
b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 8 - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

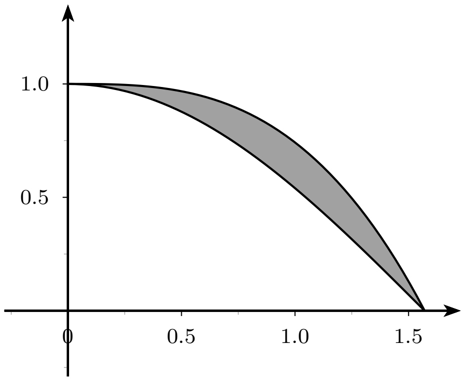
d) $f(x) = x(6 - 2x^2), \quad g(x) = x(2 - x^2)$

2.2.28 Calculer d'abord la valeur du paramètre a, puis l'aire du domaine grisé.

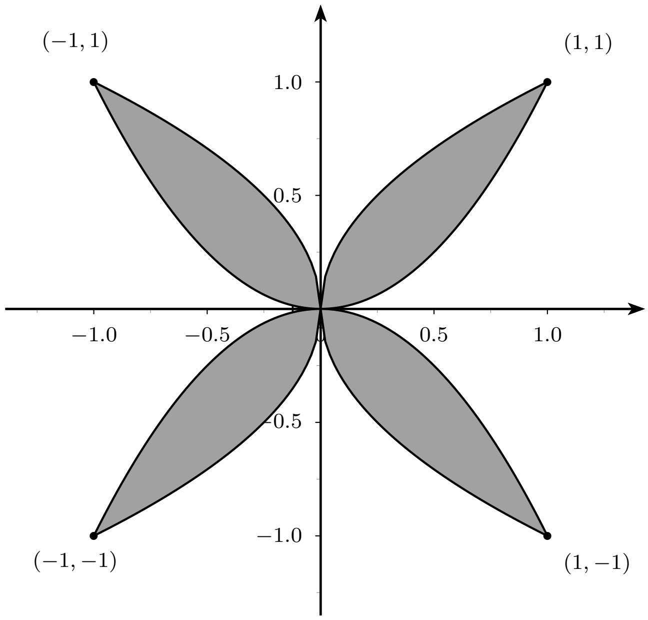
a) $y = \sin(x), \quad y = -x^2 + a$



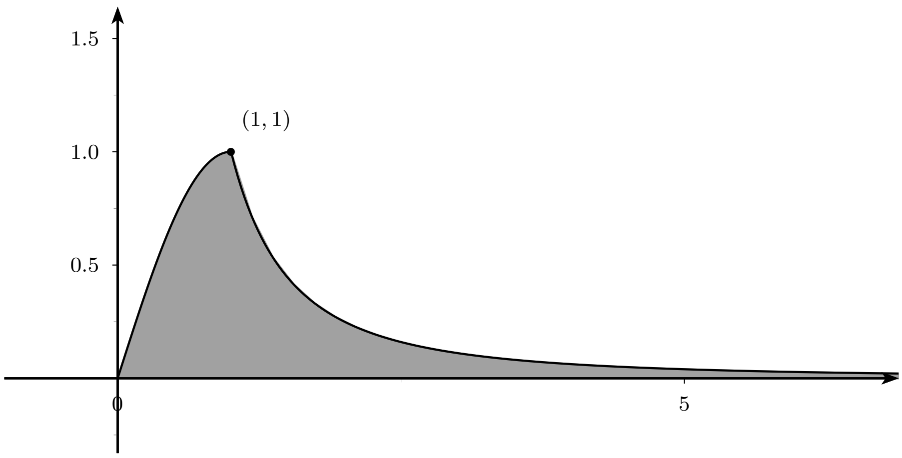
b) $y = \cos(x), \quad y = ax^3 + 1$



c) $y^2 = ax^4, \quad x^2 = y^4$



d) $y = \sin(ax), \quad y = \dfrac{1}{x^2}$



2.2.29 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y = x^2, \quad y = -1, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 5$$

2.2.30 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y^2 = 4 - x \quad \text{et} \quad y^2 = 4 + x$$

2.2.31 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les courbes $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ soit égale à 9.

2.2.32 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume, sachant que :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

2.2.33 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite $y = x$,

a) en prenant x comme variable d'intégration ;

b) en prenant y comme variable d'intégration.

2.2.34 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume :

a) $f(x) = x + 1, \qquad a = 1,\, b = 3$

b) $f(x) = x^2, \qquad a = 0,\, b = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \qquad a = 1,\, b = 2$

d) $f(x) = \cos(x), \qquad a = -\dfrac{\pi}{2},\, b = \dfrac{\pi}{2}$

2.2.35 Le domaine borné délimité par la courbe d'équation

$$y = k\,(1 - k\,x)\,\sqrt{x}$$

pour $k > 0$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant de la valeur du paramètre k.

2.2.36 Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2\,x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

2.2.37 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 1. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est un disque. Après avoir montré que l'aire de la section située à l'abscisse x vaut $A(x) = \pi\,(1 - x^2)$, en déduire par calcul le volume de ce solide.

2.2.38 Les axes de coordonnées et la parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le premier quadrant. Déterminer l'équation de la droite verticale (valeur approchée) qui partage ce domaine en deux parties de même aire.

2.2.39 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Poser le calcul permettant de déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de :

a) l'axe Ox ;

b) l'axe Oy ;

c) la droite $x = 1$;

d) la droite $x = 2$;

e) la droite $y = 3$;

f) la droite $y = 6$.

2.2.40 La base d'un solide est délimitée par les courbes d'équations

$$x = y^2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

Calculer le volume de ce solide, sachant que chaque section de celui-ci par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est :

a) un carré ;

b) un demi-cercle ;

c) un triangle équilatéral ;

d) un trapèze dont la base supérieure mesure la moitié de la base inférieure et dont la hauteur mesure le quart de la base inférieure.

2.2.41 Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

2.3 Exponentielles et logarithmes

2.3.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{1/x}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

g) $f(x) = x^2\, e^x$

h) $f(x) = e^{-x}\, \cos(x)$

2.3.2 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x\, e^x$.

2.3.3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 2 - e^x$

d) $f(x) = e^{2-x}$

2.3.4 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 e^{3x-7}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x\, dx$

f) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} x^2\, e^x\, dx$

2.3.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\, e^x}{1-e^x}$

d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\, e^{1/x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2\, e^x - 1}{e^x + 2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^2 + x)\, e^x$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x + 3}$

2.3.6 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(5x)$

b) $f(x) = \ln(x-1)$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

d) $f(x) = \ln(\mid 1-x \mid)$

e) $f(x) = \ln(x^2-x)$

f) $f(x) = \ln(x-x^2)$

g) $f(x) = \ln(\mid x^2-x \mid)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

j) $f(x) = \ln(3\,x^5)$

k) $f(x) = x\ln(x) - x$

l) $f(x) = \ln(\mid \cos(x) \mid)$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

2.3.7 Calculer les zéros et les extremums de $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$.

2.3.8 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$

d) $f(x) = x^2+x+1+\dfrac{3}{5x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

f) $f(x) = \tan(x)$

2.3.9 Lorsqu'elles sont définies, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x}$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

e) $\displaystyle\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,dx$

2.3.10 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-3x^3}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2-4)}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

2.3.11 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-3x+9}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

2.3.12 Calculer les intégrales indéfinies :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$

e) $\displaystyle\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

j) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

2.3.13 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

c) $\lim_{x\to e} \dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{2-x}$

e) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)}$

g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

h) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$

2.3.14 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_2(2x+3)$

b) $f(x) = \log_3(x^2-2x+1)$

c) $f(x) = 3^{2x-4}$

d) $f(x) = \exp_2(\sqrt{x^2+1})$

2.3.15 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{8^x-2^x}{4x}$

b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\log_5(x+2)}{x+1}$

2.3.16 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 4^x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \exp_2(x^2)\;x\,dx$

2.3.17 Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ pour $a>0$. En déduire

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$$

2.3.18 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = e^{1/x}$

c) $f(x) = (x^2-4x+4)e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x+2}{1-3e^x}$

f) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$

2.3.19 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

f) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

2.3.20 Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties.

a) $\displaystyle\int (x^2 + 5)e^x \, dx$

b) $\displaystyle\int x \ln(x) \, dx$

c) $\displaystyle\int e^x \, \cos(2x) \, dx$

d) $\displaystyle\int (2x + 3) \, \sin(x) \, dx$

2.3.21 Soit les courbes $\gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\gamma_2 : y = e^{-x} \cos(x)$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes γ_1 et γ_2 sur $[-\pi; 3\pi]$.

b) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

2.3.22 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = 3^x$ en son point d'intersection avec l'axe Oy.

2.3.23 De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Déterminer l'équation de cette tangente, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec la courbe.

2.3.24 Soit E et F les points d'inflexion de la courbe $y = \ln(x^2 + 1)$. On fait tourner le morceau de surface limité par le segment EF et la courbe autour de Oy. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

2.3.25 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

2.3.26 Soit les fonctions $f(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Montrer que le graphe de h partage la surface délimitée par le graphe de f, l'axe Ox et la droite $x = e$ en deux domaines d'aires égales.

2.3.27 Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de la fonction f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.

2.3.28 Soit les fonctions $f(x) = (x + 1)\, e^{-x}$ et $g(x) = -e^x + a$. Déterminer a de sorte que les graphes de f et g se coupent en l'extremum de f.

2.3.29 Déterminer les coordonnées d'un point P de la courbe $y = 2\ln(x)$ $(x \geq 1)$ de sorte que le triangle délimité par la normale en P à la courbe, la verticale passant par P et l'axe Ox soit d'aire maximale. Calculer cette aire.

2.3.30 Considérons les fonctions $f(x) = (x - 1)\, e^x$ et $g(x) = -e^{x-a} + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer a et b de telle manière que les graphes de f et g se coupent au point d'abscisse 1 à angle droit.

2.3.31 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(1 + \ln(x))^2}{x}$$

Déterminer la valeur du nombre réel $k > 1$ pour laquelle l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = k$ et $y = 0$ soit égale à $8/3$.

2.3.32 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe $y = 2^{-x}$ et comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

2.3.33 Sous quel angle les courbes $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

2.4 Solutions des exercices

Approche géométrique de l'aire sous une courbe

2.1.1

a) $u_5 = 0.24$ et $v_5 = 0.44$

b) $u_{10} = 0.285$ et $v_{10} = 0.385$

c) $u_n = \dfrac{(n-1)(2\,n-1)}{6\,n^2}$ et $v_n = \dfrac{(n+1)(2\,n+1)}{6\,n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant A \leqslant v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$, on a donc $A = \dfrac{1}{3}$.

2.1.2

Somme intégrale inférieure : $s_4 = 2\,(\ln(1) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7)) \cong 9.308$
Somme intégrale supérieure : $S_4 = 2\,(\ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9)) \cong 13.702$
Somme de Riemann : $S_R = 2\,(\ln(2) + \ln(4) + \ln(6) + \ln(8)) \cong 11.901$

2.1.3

La fonction $f(x) = e^x + 1$ est toujours croissante, donc la valeur minimale sur un intervalle est toujours à l'extrémité gauche et la valeur maximale est à l'extrémité droite.
Somme intégrale inférieure : $s_6 \cong 8.412$
Somme intégrale supérieure : $S_6 \cong 11.922$
Somme de Riemann : $S_R \cong 9.949$

2.1.4

Par exemple, en divisant l'intervalle $[0; 2]$ en quatre sous-intervalles d'égale longueur, on trouve :
$S_R = f(1/4) \cdot 1/2 + f(3/4) \cdot 1/2 + f(5/4) \cdot 1/2 + f(7/4) \cdot 1/2 = 37/8 = 4.625$

2.1.5

$S_R \cong 8.718$

Primitives et intégrales

2.2.1 –

2.2.2 –

2.2.3

a) $3x + c$

b) $\dfrac{5}{2}x^2 + c$

c) $x^2 + x + c$

d) $\dfrac{5}{2}x^2 - 4x + c$

e) $\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + c$

f) $\dfrac{5}{4}x^4 + c$

g) $-\dfrac{3}{5}x^5 + c$

h) $\dfrac{1}{2}x^6 + \dfrac{2}{5}x^5 - x + c$

i) $\sin(x) - \cos(x) + c$

j) $\tan(x) + c$

2.2.4

a) $-\dfrac{1}{x} + c$

b) $-\dfrac{1}{x^2} + c$

c) $\dfrac{7}{4x^4} + c$

d) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

e) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

f) $2\sqrt{x} + c$

g) $3\sqrt[3]{x} + c$

h) $-\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$

2.2.5

a) $\dfrac{1}{3}\sin(3x) + c$

b) $-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + c$

c) $\dfrac{1}{4}(x+3)^4 + c$

d) $\dfrac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

e) $\dfrac{1}{42}(7x-2)^6 + c$

f) $\dfrac{1}{4}(3x^2+x)^4 + c$

g) $\dfrac{1}{40}(4x^2+3)^5 + c$

h) $\dfrac{1}{3}\sin^3(x) + c$

i) $\dfrac{1}{3}\tan^3(x) + c$

j) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + c$

k) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

l) $\sqrt{x^2+2x} + c$

2.2.6

a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4} + c$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} + c$

c) $\sin(x) - \dfrac{\sin^3(x)}{3} + c$

d) $\dfrac{12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)}{32} + c$

2.2.7

a) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$

b) $\frac{2}{3}\sin(x)\sqrt{\sin(x)} - \frac{2}{7}\sin^3(x)\sqrt{\sin(x)} + c$

c) $-\frac{1}{16}\sin(8x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
$-\frac{1}{16}\cos(8x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + c$

d) $-\ln(2 - \sin(x)) + c$

2.2.8

a) $x^3 - x^2 + 3x + c$

b) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4x} + c$

c) $4\sqrt[4]{x^7} + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

e) $-2\cos(x) - 3\sin(x) + c$

f) $\frac{1}{2}\sin(2x) + c$

g) $5\tan(x) + 5\sin(x) + c$

h) $-8\cos(x) + 4\sqrt{2x} + c$

i) $\frac{9}{5}x^5 - 14x^3 + 49x + c$

j) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

k) $\frac{1}{21}(3x-5)^7 + c$

l) $\frac{4}{3(4-3x)^3} + c$

m) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-8)^5} + c$

n) $2\tan(3x) + c$

o) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

p) $2\sqrt{x^2 - x - 1} + c$

2.2.9

a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{37}{6}x + \frac{35}{12}$

c) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

2.2.10

a) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

b) $F(x) = -\frac{18}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

c) $F(x) = \begin{cases} x^2/2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -x^2/2 + 6\,x - 9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

2.2.11 $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 8}{2x}$

2.2.12

a) 15

b) 0

c) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{2}$

e) 1 f) 78 g) 2 h) $\frac{1}{3}$

2.2.13

a) 7 b) 9 c) -8 d) 8

2.2.14 –

2.2.15

a) $k = 2/9$

b) $k = 7$

c) $k \in \{\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$

d) $k \in \{-5/3; 0\}$

2.2.16

a) La fonction admet un minimum en $(-1; -1/4)$, un maximum en $(0; 0)$, et un minimum en $(1; -1/4)$.

b) La fonction admet un minimum en $(-1; -2/3)$.

2.2.17

a) $-\frac{16\sqrt{2}}{15}$ c) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{9\pi}{4}$ d) $\frac{14\sqrt{3}}{5}\,a^5$

2.2.18

a) π

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2+\pi}{8}$

d) $\dfrac{116}{15}$

2.2.19

a) $1+6\,\ln\left(\frac{7}{8}\right)$

b) $\dfrac{352}{15}$

c) $\dfrac{1}{6}$

d) 98

e) $\dfrac{9\pi}{4}$

f) $\ln(18)$

g) $\dfrac{\pi}{4}$

h) $\dfrac{128}{15}$

2.2.20

a) $\dfrac{\cos^5(x)}{5}-\dfrac{\cos^3(x)}{3}+c$

b) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}(x)-\frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}}(x)+\frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}}(x)+c$

c) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin(12x)}{96}+c$

d) $\dfrac{x\sin(2)}{2}-\dfrac{\cos(2x)}{4}+c$

e) $\dfrac{\sin(x)}{2}-\dfrac{\sin(7x)}{14}+c$

f) $\dfrac{\sin(3x)}{6}-\dfrac{\sin(x)}{4}-\dfrac{\sin(5x)}{20}+c$

2.2.21 Dans les trois cas, la solution est : $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3}$.

2.2.22

a) 2

b) $-\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{11}{18}$

d) L'intégrale généralisée diverge.

e) L'intégrale généralisée diverge.

f) L'intégrale généralisée diverge.

g) $3\,\pi$

h) 4

2.2.23

a) $\dfrac{5}{6}$ b) $5-\sqrt{5}$

2.2.24

a) $\dfrac{128}{3}$ b) 2 c) 1 d) $\dfrac{64}{3}$

2.2.25

a) $\dfrac{37}{12}$ b) $\dfrac{16}{3}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{490}{3}$

2.2.26 $c=\dfrac{15}{4}$

2.2.27

a) $\dfrac{32}{3}$ b) $\dfrac{64}{3}$ c) 9 d) 8

2.2.28

a) $a=1+\dfrac{\pi^2}{4}$, aire : $\dfrac{\pi^3+6\pi-12}{12}$

b) $a=-\dfrac{8}{\pi^3}$, aire : $\dfrac{3\pi}{8}-1$

c) $a=1$, aire : $\dfrac{4}{3}$

d) $a=\dfrac{\pi}{2}$, aire : $\dfrac{2}{\pi}+1$

2.2.29 42

2.2.30 $\dfrac{64}{3}$

2.2.31 $m=\dfrac{3}{2}$

2.2.32

a) $\dfrac{16}{15}\,\pi$ b) $\dfrac{4}{3}\,\pi$

2.2.33 $\dfrac{9}{2}$

2.2.34

a) $\dfrac{56}{3}\,\pi$ b) $\dfrac{1\,024}{5}\,\pi$

c) $\dfrac{\pi}{6}$

d) $\dfrac{\pi^2}{2}$

2.2.35 –

2.2.36

a) $\dfrac{3}{10}\,\pi$

b) $135\,\pi$

2.2.37 $\dfrac{4}{3}\,\pi$

2.2.38 $x \approx 1.2091$

2.2.39

a) $\pi \displaystyle\int_1^2 ((3x)^2 - (x^2+2)^2)\,dx = \frac{22}{15}\,\pi$

b) $\pi \displaystyle\int_3^6 ((\sqrt{y-2})^2 - (y/3)^2)\,dy = \frac{\pi}{2}$

c) $\pi \displaystyle\int_3^6 ((\sqrt{y-2}-1)^2 - (y/3-1)^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

d) $\pi \displaystyle\int_3^6 ((2-y/3)^2 - (2-\sqrt{y-2})^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

e) $\pi \displaystyle\int_1^2 ((3x-3)^2 - (x^2+2-3)^2)\,dx = \frac{7}{15}\,\pi$

f) $\pi \displaystyle\int_1^2 ((6-(x^2+2))^2 - (6-3x)^2)\,dx = \frac{8}{15}\,\pi$

2.2.40

a) 162

b) $\dfrac{81}{4}\,\pi$

c) $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{243}{8}$

2.2.41 $\dfrac{1}{2}$

Exponentielles et logarithmes

2.3.1

a) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5\, e^{5\,x}$

b) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\, x\, e^{x^2}$

c) $D_f = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

d) $D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $D_f =]-1; 1[, \quad f'(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$

f) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)}$

g) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

h) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(\cos(x) + \sin(x))\, e^{-x}$

2.3.2 $\quad f^{(n)}(x) = e^x\,(x+n)$

2.3.3

a) $2e^x + c$

b) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + c$

c) $2x - e^x + c$

d) $-e^{2-x} + c$

2.3.4

a) $e^2 - e$

b) $\dfrac{e^3 - 1}{3\, e^4}$

c) $\dfrac{e^4 - 1}{2}$

d) $-2\,(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})$

e) 1

f) $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 4 - e$

2.3.5

a) e^2

b) 1

c) -1

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) 2

g) 0

h) $+\infty$

2.3.6

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $D_f =]1; +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

c) $D_f =]-\infty; 1[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

e) $D_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

f) $D_f =]0; 1[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

g) $D_f = \mathbb{R}^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

h) $D_f =]-\infty; 1[\backslash\{0\}, \quad f'(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x}$

i) $D_f =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[, \quad f'(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

j) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{5}{x}$

k) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x)$

l) $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad f'(x) = -\tan(x)$

m) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$

n) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \quad f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$

2.3.7 Les zéros sont $x = 1$ et $x = e^4$ et les coordonnées du maximum sont $(e; 1/2)$.

2.3.8

a) $F(x) = \ln|x + 1| + c$

b) $F(x) = \dfrac{1}{3} \ln|3x + 2| + c$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| + c$

d) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{3}{5} \ln|5x - 1| + c$

e) $F(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + 3\,x + \ln|x - 1| + c$

f) $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

2.3.9

a) $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

b) $\ln(3)$

c) non définie

d) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$

e) $140 + \ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$

f) $\ln(2)$

2.3.10

a) $F(x) = \dfrac{5}{2} \ln|x - 4| + \dfrac{3}{2} \ln|x + 2| + c$

b) $F(x) = \dfrac{1}{4} \ln\left|\dfrac{x + 1}{x - 1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2 - 1)} + c$

c) $F(x) = \dfrac{1}{27} \ln\left|\dfrac{x - 3}{x}\right| + \dfrac{1}{6\,x^2} + \dfrac{1}{9\,x} + c$

d) $F(x) = \dfrac{1}{4} \ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| - \dfrac{1}{2} \arctan(x) + c$

e) $F(x) = \dfrac{1}{10} \ln\left(\dfrac{|x^2 - 4|}{x^2 + 1}\right) + c$

f) $F(x) = \ln\left(\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)} + c$

2.3.11

a) $\frac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + c$

b) $\frac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + c$

c) $\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + c$

d) $\frac{2\sqrt{7}}{21}\arctan\left(\dfrac{4x-3}{3\sqrt{7}}\right) + c$

e) $\frac{1}{5}\arctan\left(\dfrac{x+2}{5}\right) + c$

f) $\arctan(x-2) + x + c$

g) $-2\sqrt{9-8x-x^2} - 5\arcsin\left(\dfrac{x+4}{5}\right) + c$

h) $\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x+2}\right) + c$

2.3.12

a) $\frac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + c$

b) $\frac{1}{4}\ln\left(\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|\right) + c$

c) $\arctan(2x-1) + c$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\dfrac{3x-1}{\sqrt{5}}\right) + c$

e) $\ln\left(3x^2-7x+11\right) + c$

f) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

g) $\frac{2}{3}\ln\left(|3x-1|\right) + \frac{1}{2}\ln\left(|2x+1|\right) + c$

h) $\ln\left(\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$

i) $\frac{1}{6}\ln\left(\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

j) $\ln\left(\dfrac{x^2+4}{(x+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

k) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\ln\left(|x^3-1|\right) + c$

l) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x^2+1} + \ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\right) + \arctan(x) + c$

Décomposition en fractions simples

b) $\dfrac{1}{4(x-5)} - \dfrac{1}{4(x-1)}$

g) $\dfrac{2}{3x-1} + \dfrac{1}{2x+1}$

h) $\dfrac{2x+3}{x^2+4} - \dfrac{x+3}{x^2+2}$

i) $\dfrac{2-x}{3(x^2-x+1)} + \dfrac{1}{3(x+1)}$

j) $\dfrac{2x+1}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+1}$

k) $x^2 + \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \dfrac{1}{3(x-1)}$

l) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2x+1}{x^2+1} - \dfrac{2x-4}{(x^2+1)^2}$

2.3.13

a) 1

b) $-1/2$

c) $1/e$

d) -4

e) 0

f) -1

g) 0

h) 0

2.3.14

a) $D_f = \left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[,\quad f'(x) = \dfrac{2}{(2x+3)\,\ln(2)}$

b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)\ln(3)}$

c) $D_f = \mathbb{R},\quad f'(x) = 2\,\ln(3)\,e^{(2x-4)\ln(3)}$

d) $D_f = \mathbb{R},\quad f'(x) = \dfrac{x\ln(2)}{\sqrt{x^2+1}}\,e^{\ln(2)\sqrt{x^2+1}}$

2.3.15

a) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

b) $\dfrac{1}{\ln(5)}$

2.3.16

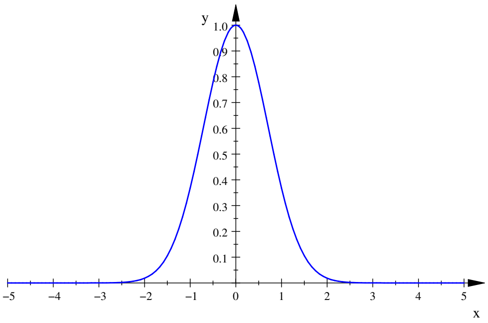
a) $\dfrac{30}{\ln(2)}$

b) 0

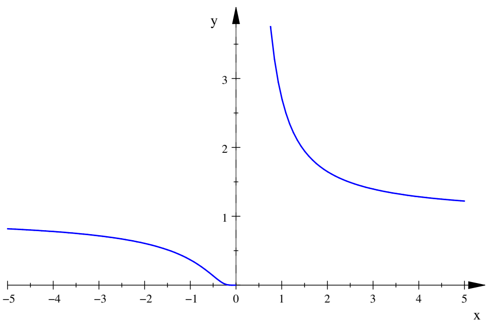
2.3.17 $\ln(a)$

2.3.18

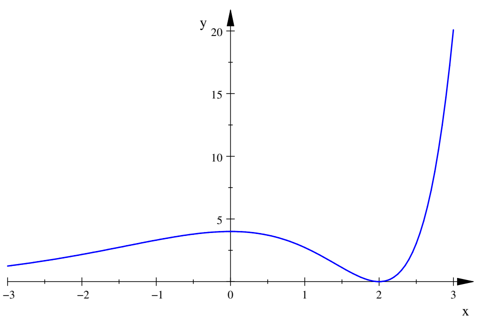
a) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Pas de zéro
AH : $y = 0$
$\delta(x) = e^{-x^2}$
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$
Max (0 ;1)
$f''(x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$
PI($-\sqrt{2}/2$;$e^{-1/2}$), PI($\sqrt{2}/2$;$e^{-1/2}$)



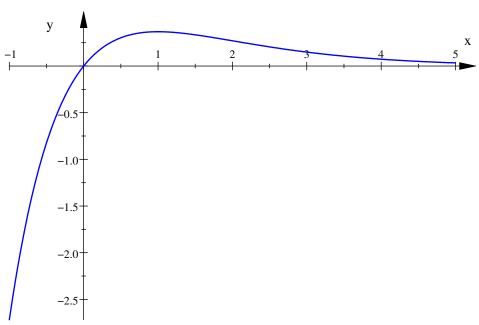
b) $D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Pas de zéro
Point limite : $(0;0)$ (à gauche)
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 1$
$\delta(x) = e^{1/x} - 1$
$f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$
PI($-1/2$;$1/e^2$)



c) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 2$
AH : $y = 0$ (vers $-\infty$)
$f'(x) = x(x-2)e^x$
Max (0 ;4) et Min (2 ;0)
$f''(x) = e^x(x^2-2)$
PI($-\sqrt{2}$;$(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$)
et PI($\sqrt{2}$;$(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$)



d)
$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 0$
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = (1-x)e^{-x}$
Max (1 ;1/e)
$f''(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$
PI(2 ;$2/e^2$)



e)

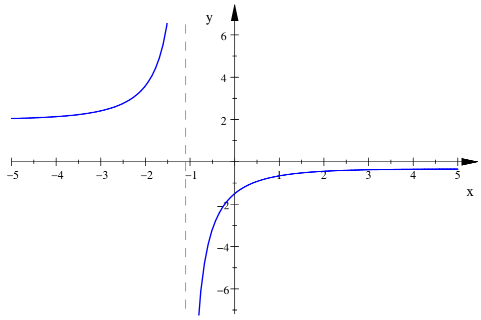
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\ln(3)\}$
Pas de parité
Pas de zéro
AV : $x = -\ln(3)$

$$\text{AH} : y = \begin{cases} 2 & (\text{vers } -\infty) \\ -1/3 & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{7e^x}{1-3e^x} & (\text{vers } -\infty) \\ \dfrac{7}{3(1-3e^x)} & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{7e^x(3e^x+1)}{(1-3e^x)^3}$$



f)

$D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Zéro : $x = -2$
Point limite : $(0;0)$ (à gauche),
AV : $x = 0$ (à droite) ; AO : $y = x + 3$

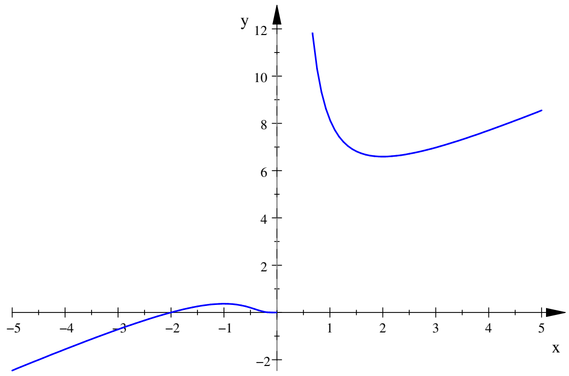
$\delta(x) = (x+2)e^{1/x} - x - 3$

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}(x^2-x-2)}{x^2}$$

Max(-1 ;1/e) et Min(2 ;4$\sqrt{e}$)

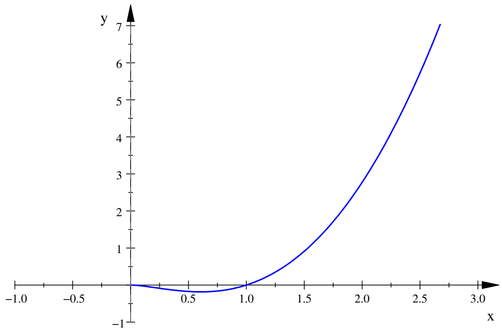
$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$$

PI(-2/5 ;8/5$e^{-5/2}$)

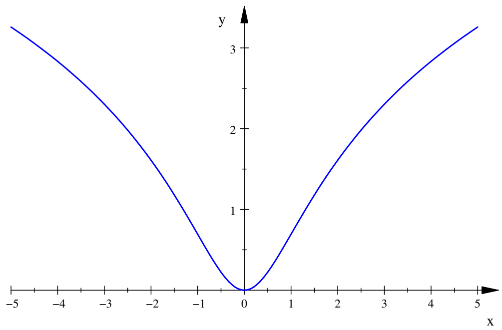


2.3.19

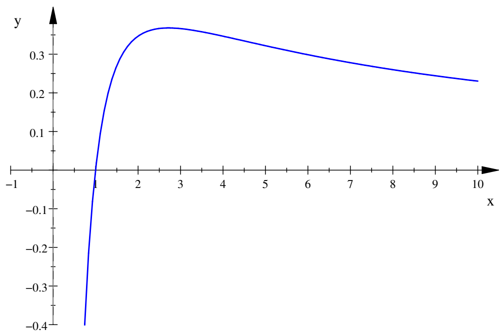
a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
Pas d'asymptote,
point limite : $(0; 0)$ (à droite)
$f'(x) = x(2\ln(x) + 1)$
Min($e^{-1/2}$;-1/2e^{-1})
$f''(x) = 2\ln(x) + 3$
PI($e^{-3/2}$;-3/2e^{-3})



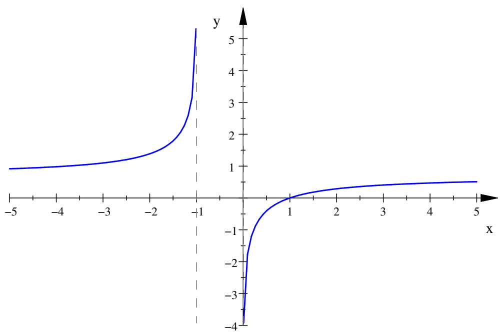
b) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Zéro : $x = 0$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
Min $(0; 0)$
$f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$
PI(-1 ;ln(2)) et PI(1 ;ln(2))



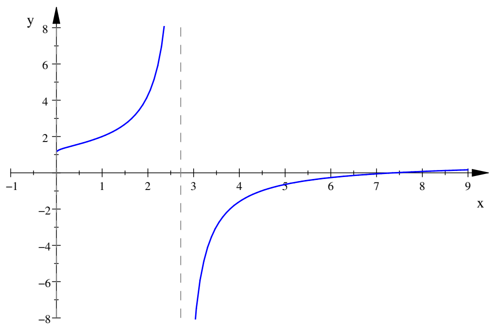
c) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
Max $(e; 1/e)$
$f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$
PI($e^{3/2}$;3/2$e^{-3/2}$)



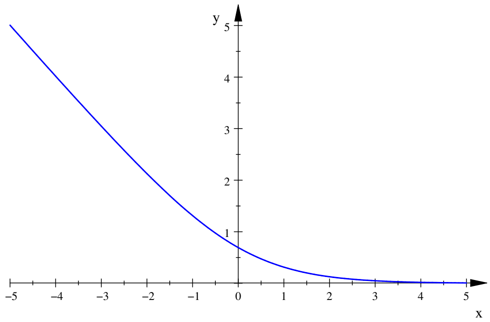
d) $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = -1$(à gauche) et $x = 0$ (à droite)
AH : $y = \ln(2)$
$\delta(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x(x + 1)}$
$f''(x) = -\dfrac{2x + 1}{x^2(x + 1)^2}$



e) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{e\}$
Pas de parité
Zéro : $x = e^2$
AV : $x = e$, point limite : $(0;1)$ (à droite)
AH : $y = 1$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = -\dfrac{1}{\ln(x) - 1}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x) - 1)^2}$
$f''(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2(\ln(x) - 1)^3}$
PI(1/e ;3/2)



f) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Pas de zéro
AO : $y = -x$ (vers $-\infty$)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \begin{cases} \ln((1+e^x)) & (\text{vers } -\infty) \\ f(x) & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{e^x + 1}$
$f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$



2.3.20

a) $e^x \left(x^2 - 2x + 7\right) + c$

b) $\dfrac{x^2 \ln(x)}{2} - \dfrac{x^2}{4} + c$

c) $\dfrac{2e^x \sin(2x)}{5} + \dfrac{e^x \cos(2x)}{5} + c$

d) $-(2x + 3) \cos(x) + 2\sin(x) + c$

2.3.21

a) $(0;1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$

b) –

2.3.22 $\ln(3)\, x - y + 1 = 0$

2.3.23 $x - e\, y = 0$ et $(e;1)$.

2.3.24 $\pi(1 - \ln(2))$.

2.3.25 $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$, $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

2.3.26 –

2.3.27 $a = -2$, $b = 1$

2.3.28 $a = 2$

2.3.29 Les coordonnées sont $(e^2; 4)$ et l'aire vaut $16/e^2$ unités carrées.

2.3.30 $a = 2, \quad b = 1/e$

2.3.31 $k = e$

2.3.32 Le volume vaut $\dfrac{15\,\pi}{8\ln(2)}$ unités cubes.

2.3.33 $\sim 40.40\,^\circ$

Chapitre 3

Combinatoire

3.1 Principes fondamentaux

3.1.1 De combien de manières peut-on choisir le délégué, son remplaçant et le responsable des nettoyages dans une classe de 25 élèves ?

3.1.2 Combien de « mots » de trois lettres comportent seulement des voyelles ou seulement des consonnes ?

3.1.3 Combien de nombres pairs de 3 chiffres avec répétitions peut-on former avec les trois chiffres 1, 2 et 4 ? Parmi ceux-ci, combien possèdent au moins une fois le chiffre 1 ?

3.1.4 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle possède 15 couleurs différentes et présente 3 versions différentes, chacune avec ou sans transmission automatique. De combien de manières peut-il effectuer sa commande ?

3.2 La notation factorielle

3.2.1 Je dispose d'une boîte allongée comportant 4 compartiments juxtaposés. Je dois mettre 4 boules de billard dans ma boîte. La première boule est jaune, la deuxième rouge, la troisième bleue et la quatrième verte. De combien de manières différentes puis-je procéder ?

3.2.2 Trois amis prennent place sur un banc. Si seule la position relative compte, de combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?

3.2.3 D'un jeu de jass, je sors les 9 cartes de coeur. Je dispose ces 9 cartes sur une ligne devant moi. Sachant qu'il me faut 5 secondes pour poser toutes les cartes, combien de temps me faudra-t-il pour pouvoir tester toutes les configurations possibles ?

3.2.4 Soit n un nombre entier positif. On définit $n!$ de la façon suivante :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

L'expression $n!$ se lit n factorielle. Calculer la valeur de chaque expression ci-dessous :

a) $2!$

b) $3!$

c) $10!$

d) $2!\,3!$

e) $5!$

f) $50!$

g) $6!$

h) $100!$

i) $1000!$

3.2.5 Simplifier l'expression donnée, puis calculer sa valeur :

a) $\dfrac{12!}{9!}$

b) $\dfrac{11!}{3!\,2!\,4!}$

c) $\dfrac{12!}{8!\,4!}$

d) $\dfrac{100!}{98!\,5!}$

e) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

f) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

3.3 Les permutations

3.3.1 Huit personnes désirent s'asseoir sur un banc. De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir ?

3.3.2 Combien existe-t-il d'anagrammes des mots : MERCI ; ENTENTE ?

3.3.3 On place au hasard les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?

b) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte, dans cet ordre ?

c) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

3.3.4 Combien de nombres de 9 chiffres distincts peut-on former avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

3.4 Les arrangements

3.4.1

a) Combien de nombres de 4 chiffres distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

b) Combien de nombres de 4 chiffres non nécessairement distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

3.4.2 De combien de façons peut-on disposer 5 voitures dans un parking de 8 places ? Même question si les 3 premières places vont être occupées par les 3 membres de la direction faisant partie des 5 voitures à placer.

3.4.3 Un sac contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Combien y a-t-il de tirages différents de 5 boules sans et avec remise ?

3.4.4 On lance 10 fois une pièce de monnaie. Combien de résultats différents peut-on obtenir (un résultat est une suite ordonnée de piles et de faces) ?

3.5 Les combinaisons

3.5.1 Lu sur la carte d'un restaurant : « les 1001 carpaccios ». Dans la pratique, le restaurateur propose au client d'agrémenter son carpaccio de 4 garnitures choisies parmi 15. Quel est le nombre réel de compositions possibles ?

3.5.2 Un groupe de 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y-a-t-il de poignées de mains ?

3.5.3

a) De combien de façons peut-on choisir un bouquet de 7 fleurs parmi 12 ?

b) Les 12 fleurs se répartissent en 8 roses et 4 gerberas. De combien de façons peut-on composer un bouquet de 7 fleurs, si l'on veut :

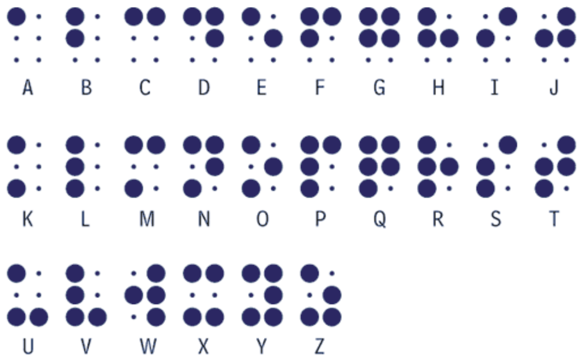
   i) 4 roses et 3 gerberas ?

   ii) au moins 1 gerbera ?

3.6 Problèmes mélangés

3.6.1 Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 6 places. Quel est le nombre de possibilités ? Même question, mais avec 6 personnes.

3.6.2 Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



3.6.3

a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de « mots » de 4 lettres ?

b) Même question, en se limitant aux mots composés de 4 lettres différentes.

3.6.4 On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y-a-t-il de mains possibles ?

3.6.5 Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ? Parmi ceux-ci, combien sont-ils inférieurs à 400 ? impairs ? multiples de 5 ?

3.6.6 De combien de façons peut-on aligner 5 dés à six faces de couleurs différentes ?

3.6.7 Un menu de restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun de ces 4 types de plats ?

3.6.8

a) Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants. De combien de manières différentes ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?

b) Même question dans le cas où, à chaque étage, un occupant au plus quitte l'ascenseur.

3.6.9

a) Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde. De combien de manières peuvent-elles se disposer (on suppose que seule la place relative de ces personnes importe) ?

b) Même question, si l'on suppose de plus que deux personnes choisies d'avance doivent être placées côte à côte.

3.6.10 De combien de façons différentes peut-on aligner 5 boules rouges, 2 blanches et 3 bleues ?

3.6.11 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot MISSISSIPPI ? Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

3.6.12 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième places ?

3.6.13 Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les lettres du mot BATAVIA ?

3.6.14 De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes en rang si :

a) aucune restriction n'est mise ;

b) les personnes A et B veulent être ensemble ;

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes ;

d) les hommes, qui sont 5, doivent rester ensemble ;

e) les personnes forment 4 couples et chaque couple doit rester réuni.

3.6.15 Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y aura-t-il de parties disputées ?

3.6.16

a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. De combien de manières différentes peut-on choisir ces 4 personnes ?

3.6.17 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut composer une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

3.6.18 On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Quel est le nombre de distributions différentes ?

3.6.19

a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix peut-il faire ?

b) Même question en supposant de plus qu'il doive obligatoirement résoudre :

   i) les 3 premiers problèmes ;

   ii) 4 au moins des 5 premiers problèmes.

3.6.20 De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

a) les 4 as ?

b) 2 as et 2 rois ?

c) au moins un as ?

3.6.21 Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?

3.6.22 Dans le jeu du Sport-Toto, on pronostique le résultat de 13 matches (1 = victoire de l'équipe à domicile, x = match nul, 2 = victoire de l'équipe visiteuse). Combien de pronostics différents peut-on écrire ?

3.6.23 Lorsqu'on jette 20 fois une pièce de monnaie, combien de séquences différentes sont possibles ? Parmi celles-ci, combien contiennent exactement 1 fois pile ? 4 fois pile ? 10 fois pile ? 20 fois pile ?

3.6.24 De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (marquer 6 numéros sur 45) ? Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent de réaliser 6 points, 0 point, 3 points ?

3.6.25

a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 . On en tire simultanément trois. Déterminer le nombre de tirages différents.

b) Même question si l'on tire successivement 3 boules, sans remettre dans l'urne celles qui ont été tirées, en tenant compte de l'ordre.

c) Même question que sous b) si, après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

3.6.26 (Jeu du MasterMind) Dénombrer le nombre de possibilités qu'il y a de remplir 5 trous avec 8 couleurs différentes. Les couleurs peuvent être répétées et certains trous laissés vides.

3.6.27 Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.

a) Combien de comités peut-on envisager ?

b) Combien de ces comités comprennent exactement 3 dames ?

c) Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?

3.6.28 Quel est le nombre de possibilités de former deux équipes de beach-volley différentes de 2 joueurs avec 7 personnes ?

3.6.29 Avec 15 personnes, de combien de manières différentes peut-on former 3 équipes de 5 ?

3.6.30 Sur un voilier, on dispose d'un instrument de signalisation constitué d'exactement 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et d'un pavillon bleu.

3.6.31 Un gymnase a reçu 3 billets de concert pour les élèves d'une classe. Sachant que cette classe est composée de 19 étudiants, calculer le nombre de façons de distribuer ces trois billets dans chacun des cas suivants :

a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;

c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

3.6.32

a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.

b) Parmi les configurations ci-dessus, quel est le nombre de celles où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

c) Même question, mais où figure au moins trois fois le chiffre 7.

d) Même question, mais où figure au moins une fois le chiffre 7.

3.6.33

a) Sur un damier rectangulaire de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer 4 jetons de couleurs différentes ?

b) Même question s'il doit y avoir un seul jeton dans la première colonne et qu'il soit jaune.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement deux jetons dans la troisième colonne.

d) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir au moins deux jetons dans la quatrième colonne.

3.6.34

a) Sur un damier rectangulaire de 7 colonnes et 5 lignes, de combien de manières peut-on disposer 7 jetons, à savoir 4 bleus et 3 jaunes ?

b) Même question si les jetons bleus occupent les cases numérotées 1, 2, 3, 4 de la première ligne.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement 1 jeton bleu et 2 jetons jaunes dans la première colonne.

3.6.35 Sur un damier rectangulaire de 10 colonnes et 30 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 6 jetons de même couleur s'il y a :

a) au plus un jeton par colonne ?

b) au plus un jeton par ligne ?

c) au plus un jeton par ligne et par colonne ?

3.6.36 On dispose de 7 jetons. Deux portent le chiffre 1, trois portent le chiffre 2, deux portent le chiffre 3.

a) Combien de nombres différents peut-on composer en juxtaposant ces 7 jetons ?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 1 300 000 ?

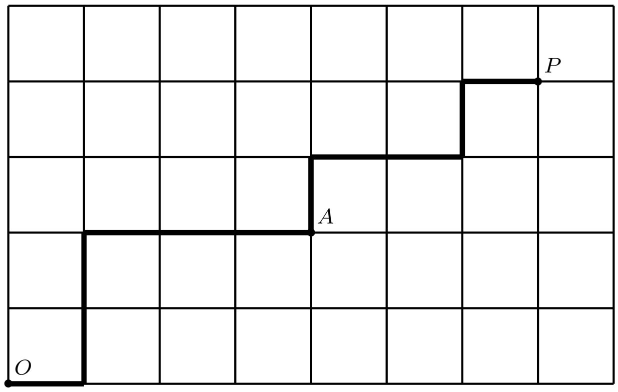
3.6.37 On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts. On en choisit quatre. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que :

a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?

b) une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

c) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

3.6.38 Dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on veut joindre l'origine $O(0;0)$ au point $P(7;4)$ par un chemin aussi court que possible, en suivant les lignes du réseau :



a) Combien de tels chemins y a-t-il ?
b) Combien y en a-t-il qui passent par $A(4;2)$?

3.6.39 On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien y a-t-il de mains :
a) au total ?
b) formées de trois as ?
c) formées d'un roi et de deux as ?
d) ne contenant aucun as ?
e) contenant au moins un as ?
f) contenant exactement un as ?

3.6.40 Dans un groupe de 20 personnes, 10 lisent au moins la revue A, 8 lisent au moins la revue B et 3 lisent les deux revues. Combien d'échantillons différents peut-on choisir si l'échantillon doit être formé :
a) de cinq personnes lisant au moins une revue ?
b) de trois personnes lisant la revue A, et de deux personnes lisant la revue B, chacune d'entre elles ne lisant qu'une seule revue ?
c) de cinq personnes, dont trois au moins lisent la revue A ?

3.6.41 De combien de façons peut-on arranger les lettres du mot

NASHVILLETENNESSEE

de sorte à ce que le premier N précède le premier S et que le premier E précède le T ?

3.6.42 On jette k dés à six faces. Combien y-a-t-il de résultats différents ?

3.6.43 Combien y a-t-il de mots de quatre lettres avec les lettres dans l'ordre alphabétique ?

3.6.44 De combien de façons peut-on asseoir 7 hommes et 5 femmes sur un banc de façon à ce qu'il n'y ait pas 2 femmes assises l'une à côté de l'autre ?

3.6.45 De combien de façons peut-on arranger les lettres du mot

RECURRENCERELATION

de sorte à ce que deux voyelles ne soient jamais adjacentes ?

3.6.46 De combien de façons peut-on arranger les lettres du mot

RECURRENCERELATION

de sorte à ce que les voyelles soient dans l'ordre alphabétique ?

3.6.47 Combien y a-t-il de mots de 5 lettres formés avec des lettres choisies parmi les lettres A, B, C et D, dans lesquels le mot « BAD » n'apparaît pas ?

3.6.48 De combien de façon peut-on faire asseoir 8 personnes en rang, sachant que Pierre et Paul ne veulent pas être assis côte à côte ?

3.6.49 Dans ce problème, n désigne un certain nombre de nationalités différentes. Une rangée de personnes est formée de n fois 4 personnes de la nationalité correspondant à n. Combien de telles rangées peut-on former, sachant qu'une personne se trouve toujours à côté d'au moins un compatriote ?

3.6.50 On dispose de 20 jouets différents les uns des autres. De combien de façons peut-on distribuer ces jouets à 5 enfants, sachant que chaque enfant recevra 4 jouets au total ?

3.6.51 De combien de façons peut-on répartir un groupe de 18 personnes en trois groupes de travail formés de 5, 6 et 7 personnes ?

3.6.52 De combien de façons peut-on répartir un groupe de 18 personnes en trois groupes de travail, tous trois formés de 6 personnes ?

3.6.53 Combien de mots différents peut-on former avec 7 fois la lettre R et 11 fois la lettre B, de sorte à ce que deux R ne soient jamais adjacents ?

3.6.54 De combien de façons peut-on arranger les lettres du mot

MISSISSIPPI

de sorte à ne jamais avoir deux I adjacents ?

3.6.55 Combien y a-t-il de solutions entières et non négatives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 67?$$

3.6.56 De combien de façons peut-on distribuer 30 balles vertes à 4 personnes si Alice et Eve ne reçoivent à elles deux pas plus de 20 balles et si Jean en reçoit au moins 7 ?

3.6.57 De combien de façons peut-on choisir 18 lettres parmi 7 A, 8 B et 9 C ?

3.7 Solutions des exercices

Principes fondamentaux

3.1.1 $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$.

3.1.2 $8\,216$.

3.1.3 18 ; 10.

3.1.4 720.

La notation factorielle

3.2.1 Il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons de procéder.

3.2.2 Il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ façons de s'asseoir.

3.2.3 $5 \cdot 9! = 1\,814\,400$ secondes, soit 504 heures !

3.2.4

a) 2 ;

b) 6 ;

c) $3\,628\,800$;

d) 12 ;

e) 120 ;

f) $30\,414\,093\,201\,713\,378\,043\,612\,608\,166\,064\,768\,844\,377\,641\,568\,960\,512\,000\,000\,000\,000$;

g) 720 ;

h) $\sim 9.33262154439442 \cdot 10^{157}$;

i) $\sim 4.0238726007709 \cdot 10^{2567}$.

3.2.5

a) $1\,320$;

b) $138\,600$;

c) 495 ;

d) $\dfrac{165}{2}$;

e) $n(n-1)$;

f) $(n+2)(n+1)n$.

Les permutations

3.3.1 $40\,320$.

3.3.2 120 ; 210.

3.3.3 a) 479 001 600 ; b) 39 916 800 ; c) 79 833 600.

3.3.4 362 880.

Les arrangements

3.4.1 a) 360 ; b) 1'296.

3.4.2 6'720 ; 120.

3.4.3 2'520 ; 16'807.

3.4.4 1'024.

Les combinaisons

3.5.1 1'365.

3.5.2 66.

3.5.3 a) 792 ; b) i) 280 ; ii) 784.

Problèmes mélangés

3.6.1 720 dans les deux cas.

3.6.2 64 (en fait 63 à cause de l'espace entre les mots).

3.6.3 a) 456'976 ; b) 358'800.

3.6.4 $635\,013\,559\,600 \simeq 6,4 \cdot 10^{11}$.

3.6.5 120 ; 40 ; 80 ; 20.

3.6.6 933'120.

3.6.7 3960.

3.6.8 a) 32'768 ; b) 6'720.

3.6.9 a) 40'320 ; b) 10'080.

3.6.10 2 520.

3.6.11 34'650 ; 3'780.

3.6.12 180.

3.6.13 208.

3.6.14

a) 40 320 ; b) 10 080. c) 1 152 ; d) 2 880 ; e) 384.

3.6.15 66.

3.6.16

a) 12'650 ; b) 303'600.

3.6.17 3'780.

3.6.18 $21\,452\,752\,266\,265\,320\,000 \simeq 2,1 \cdot 10^{19}$.

3.6.19

a) 45 ; b) i) 21 ; ii) 35.

3.6.20

a) 32 ; b) 1 008 ; c) 175 616.

3.6.21 70.

3.6.22 1 594 323.

3.6.23 1'048'576 ; 20 ; 4'845 ; 184'756 ; 1.

3.6.24 8'145'060 ; 1 ; 3'262'623 ; 182'780.

3.6.25

a) 220 ; b) 1 320 ; c) 1 728.

3.6.26 59'049.

3.6.27

a) 658'008 ; b) 241'500 ; c) 484'380.

3.6.28 105.

3.6.29 126 126.

3.6.30 280.

3.6.31

a) 5'814 ; b) 6'859 ; c) 969.

3.6.32

a) 10^5 ;
b) 810 ;
c) 856 ;
d) 40'951.

3.6.33

a) 11'880 ; b) 1'512 ; c) 2'592 ; d) 2'808.

3.6.34

a) 235'358'200 ; b) 4'495 ; c) 3'288'600.

3.6.35

a) $\sim 1,5 \cdot 10^{11}$; b) $\sim 5,9 \cdot 10^{11}$; c) $\sim 9 \cdot 10^{10}$.

3.6.36

a) 210 ; b) 40.

3.6.37

a) 5 ; b) 100 ; c) 105.

3.6.38 a) 330 ; b) 150 ;

3.6.39

a) 7140 ;
b) 4 ;
c) 24 ;
d) 4960 ;
e) 2180 ;
f) 19840.

3.6.40

a) 3003 ; b) 350 ; c) 7752.

3.6.41

$$1 \cdot \binom{3+3-1}{2} \cdot 1 \cdot \binom{7+6-1}{6} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{13+6-1}{6} \cdot \frac{6!}{2!}$$

3.6.42

$$\binom{k+6-1}{k}$$

3.6.43

$$\binom{26+4-1}{4}$$

3.6.44

$$\binom{8}{5} \cdot 7! \cdot 5! = 7! \cdot 8!/3!$$

3.6.45

$$\frac{10!}{4!\,2!\,2!} \cdot \binom{11}{8} \cdot \frac{8!}{4!}$$

3.6.46

$$\binom{9+10-1}{10} \cdot \frac{10!}{4!\,2!\,2!}$$

3.6.47

$$4^5 - \binom{2+2-1}{2} \cdot 4^2$$

3.6.48

$$8! - 7! \cdot 2! = \binom{7}{2} \cdot 6! \cdot 2!$$

3.6.49

$$\frac{(2\,n)!}{2^n} \cdot (4!)^n$$

3.6.50

$$\frac{20!}{(4!)^5} = \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$$

3.6.51 $\dfrac{18!}{5!\,6!\,7!}$

3.6.52 $\dfrac{18!}{(6!)^3} \cdot \dfrac{1}{3!}$

3.6.53 $\dbinom{12}{7}$

3.6.54

$$\binom{8}{4} \cdot \frac{7!}{4!\,2!}$$

3.6.55

$$\binom{5+67-1}{67}$$

3.6.56

$$\sum_{k=0}^{20} (k+1) \cdot (24-k)$$

3.6.57 La solution est donnée par le coefficient de z^{18} dans

$$(z^0 + z^1 + \ldots + z^7) \cdot (z^0 + z^1 + \ldots + z^8) \cdot (z^0 + z^1 + \ldots + z^9)$$

soit 28.
On peut aussi le calculer directement :

$$\binom{3+6-1}{6}$$

Chapitre 4

Probabilités

4.1 Premières notions

4.1.1 Une boîte contient 3 jetons : un rouge, un vert et un bleu. Écrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes :

a) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On l'y remet, puis on en tire un second.

b) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On le garde, puis on en tire un second.

4.1.2 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et l'on s'intéresse au côté qu'elle présente.

a) Écrire l'univers associé à cette expérience dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés a une importance, puis écrire l'événement E :« pile apparaît au moins deux fois ».

b) Même question dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés n'a pas d'importance.

c) Combien d'issues l'univers demandé sous a) contient-il si on jette la pièce quatre fois au lieu de trois ? Et si on jette la pièce n fois ?

4.1.3 On se rend à un match de football pour soutenir notre équipe fétiche et on s'intéresse aux différentes issues possibles de la partie : notre équipe gagne (G), effectue un match nul (N) ou perd (P). Préciser l'univers de cette expérience, puis déterminer la liste de ses événements.

4.1.4 On lance un dé. On considère l'événement A :« obtenir un nombre plus petit que 4 », B :« obtenir un nombre pair » et C :« obtenir un nombre plus grand que 1 ».

a) Écrire les événements A, B, C, $\overline{A}$, $A \cup C$ et $A \cap B$.

b) Les événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$ sont-ils incompatibles ?

c) Combien y a-t-il d'événements associés à l'expérience qui consiste à jeter un dé ?

d) Parmi tous les événements associés à l'expérience consistant à jeter un dé, combien sont incompatibles avec l'événement A ?

4.1.5 Trois boules sont tirées d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On considère les événements :

A :« la première boule est blanche »,

B :« la deuxième boule est blanche »,

C :« la troisième boule est blanche ».

Exprimer les événements suivants en termes de A, B et C :

D :« toutes les boules sont blanches »,

E :« les deux premières boules sont blanches »,

F :« au moins une boule est blanche »,

G :« seulement la troisième boule est blanche »,

H :« exactement une boule est blanche ».

4.2 Définition de la notion de probabilité

4.2.1 On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) le numéro 2 ?
b) un numéro pair ?
c) un numéro supérieur à 4 ?

4.2.2 On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

a) tirer un as ?
b) tirer un carreau ?
c) tirer le valet de coeur ?

4.2.3 On tire successivement 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 as ?
b) 2 rois et une dame ?
c) au moins un valet ?

4.2.4 On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux fois pile, puis deux fois face ?
b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?
c) au plus une fois pile ?

4.2.5 On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :

a) deux numéros égaux ?
b) un 2 et un 5 ?
c) un 2 rouge et un 5 blanc ?
d) une somme égale à 7 ?
e) une somme au plus égale à 3 ?
f) une somme au plus égale à 11 ?

4.2.6 On tire successivement 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la valeur exacte de la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois.

4.2.7 Dans un sac se trouvent 9 boules blanches, 4 rouges et quelques noires. La probabilité, lors d'un tirage simultané de deux boules, d'obtenir deux boules de même couleur est égale à 7/18. Combien y a-t-il de boules noires ?

4.2.8 D'un jeu de 36 cartes, on extrait simultanément au hasard 3 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) 3 cartes de même « couleur » [1],
b) 3 rois,
c) 1 as et 2 rois,
d) exactement deux cartes de même « couleur »,
e) 2 cartes rouges et 1 noire,
f) 1 as, 1 roi et 1 dame,
g) 1 pique, 1 carreau et 1 trèfle.

4.2.9 Dans une assemblée de 500 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le français et l'italien, 60 à la fois le français et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 comprennent les trois langues. Si l'on choisit une personne au hasard dans cette assemblée, quelle est la probabilité que cette personne comprenne :

a) exactement 2 de ces 3 langues ?
b) l'une au moins de ces 3 langues ?

4.2.10 Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voitures déterminés, les

1. Contrairement à la couleur d'une carte à jouer (rouge ou noire), la « couleur » est à interpréter comme étant la nature de la carte (pique, coeur, carreau ou trèfle).

événements suivants :

$$P_i : \text{« il y a eu au moins } i \text{ panne(s) »} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

Lors du dépouillement de l'enquête, on a constaté que P_0, P_1, P_2 et P_3 se sont produits 543, 310, 156 et 81 fois respectivement. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient,

a) exactement une fois ?

b) moins de deux fois ?

4.2.11 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 2/5$, $P(B) = 1/2$ et $P(A \cap B) = 3/10$. Calculer la probabilité des événements : $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

4.2.12 Est-il possible d'avoir deux événements A et B tels que $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,1$?

4.2.13 Soit A et B deux événements. Montrer que :

a) $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

c) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ *(inégalité de Bonferroni)*

4.2.14 Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts différents désignés par A et B. 10% des appareils ont le défaut A, 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits. Calculer la probabilité qu'il :

a) possède au moins un défaut,

b) possède le défaut A uniquement,

c) possède un seul défaut,

d) ne possède aucun défaut.

4.2.15 On sait que 60% des élèves d'une école ne portent ni bague, ni collier. De plus, 20% des élèves portent une bague et 30% ont un collier. Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

4.2.16 Une agence de voyages fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays désignés par A, B et C. On constate que parmi les personnes interrogées, 42%

connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent A, B et C. Un voyage est prévu pour l'une des personnes qui a répondu aux questions posées à l'occasion de ce sondage. On tire au sort le nom du gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?

b) ne connaissant aucun de ces trois pays ?

c) connaissant deux pays exactement ?

d) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?

4.2.17 Un connaisseur estime, lors d'un concours de beauté qui voit s'affronter en finale les candidates A, B et C, que A a autant de chances de gagner que B, mais deux fois plus de chances de gagner que C. Le jury ne peut désigner qu'une seule reine de beauté. Quelles sont, du point de vue de notre connaisseur, les probabilités de victoire des trois candidates ?

4.2.18 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0.1$ et $P(6) = 0.4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition. On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir 4,

b) d'obtenir un nombre impair,

c) d'obtenir 4 ou un nombre impair.

4.2.19 Deux joueurs A et B jettent alternativement une paire de dés. Le joueur A commence et gagne s'il obtient un total de 6 avant que B n'obtienne un total de 7, auquel cas c'est B qui gagne. Quelle est la probabilité que A gagne ?

4.3 Probabilité conditionnelle

4.3.1 On jette deux dés l'un après l'autre et on considère les événements :

A :« le total des dés est 8 »,

B :« les deux nombres sont différents »,

C :« le premier dé donne un chiffre impair ».

Calculer : $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|\overline{B})$, $P(A|\overline{C})$.

4.3.2 On tire une carte d'un jeu constitué de 36 cartes. Considérons les événements suivants :

A :« la carte tirée est un coeur »,

B :« la carte tirée est le valet de coeur »,

C :« la carte tirée est une figure de pique (roi, dame ou valet) ou un coeur ».

Calculer : $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

4.3.3 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(A \cup B) = 3/4$. Calculer $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

4.3.4 On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) dans l'ordre : l'as de pique, de coeur, de trêfle, de carreau ?
b) les 4 as ?
c) les 4 as, sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
d) un as seulement ?
e) un as au moins ?
f) un as au moins, sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

4.3.5 Soit A et B deux événements. Montrer que :

$$P(\overline{A}|B) = 1 - \ P(A|B)$$

4.3.6 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire successivement au hasard 4 cartes de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) les 4 as ?
b) un as au moins ?
c) 4 cartes rouges ?
d) 4 cartes de familles différentes ?

e) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as ?
f) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as rouge ?
g) les 4 as, sachant que la première carte tirée était l'as de coeur ?

4.3.7 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire ensuite au hasard 2 de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) deux as ?
b) deux as rouges ?
c) au moins un as ?
d) deux as, si l'on sait que l'une des cartes au moins est :
   i) un as ?
   ii) un as rouge ?
   iii) l'as de coeur ?

4.3.8 On jette une paire de dés bien équilibrés.

Calculer la probabilité que la somme obtenue soit supérieure à 9, sachant que :

a) le premier dé a donné un 5 ,
b) au moins un dé a donné un 5.

Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que :

c) la somme des points soit égale à 6 ,
d) la somme des points soit inférieure à 5 .

4.3.9 Dans une certaine ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marron, 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marron. On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

a) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux marron ?
b) Si elle a les yeux marron, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?
c) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marron ?

4.3.10 La probabilité que la batterie d'une voiture neuve fonctionne plus de 10'000 km est de 80%, la probabilité qu'elle fonctionne plus de 20'000 km est de 40% et la probabilité qu'elle fonctionne plus de 30'000 km est de 10%. Si la batterie d'une voiture neuve fonctionne toujours après 10'000 km, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 20'000 km ?

4.3.11 On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si l'on obtient face, on tire une bille d'une boîte B_1 contenant 3 billes rouges et 2 bleues. Sinon, on tire une bille d'une boîte B_2 contenant 2 billes rouges et 8 bleues. Sachant qu'on a tiré une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte B_1 ?

4.3.12 Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,8 m. Or, 60% des élèves sont des filles. On choisit un élève au hasard et on constate qu'il mesure plus de 1,8 m. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

4.3.13 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90% et celle que toutes les deux soient occupées 50%. Quelle est la probabilité :

a) que la première salle soit libre ?
b) que les deux salles soient libres ?
c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d) qu'une seule salle soit libre ?
e) que la seconde salle soit libre, si l'on sait que la première est occupée ?

4.3.14 Trois boîtes A,B et C contiennent :

A : 3 bonbons rouges et 5 noirs,
B : 2 bonbons rouges et 1 noir,
C : 2 bonbons rouges et 3 noirs.

a) On prend une boîte au hasard et on tire un bonbon. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
b) Si le bonbon est rouge, quelle est la probabilité qu'il provienne de A ?

4.3.15 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes,
U_2 : 1 boule rouge et 1 boule verte.

On tire une boule de U_1 puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,
b) que cette boule soit rouge, si l'on sait que la première boule tirée était rouge,
c) que la première boule tirée ait été rouge, si au second tirage on a une boule rouge.

4.3.16 On fait expérimentalement les constatations suivantes :

- le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille,
- s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0.8,

- s'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0.6.

Lors d'une belle journée ensoleillée de printemps, on vous demande de calculer la probabilité :

a) qu'il fasse beau les trois jours suivants,
b) qu'il fasse beau dans trois jours.

4.3.17 On dispose de deux urnes. La première, A, contient 2 billets verts, 3 rouges et 5 jaunes. La seconde, B, contient 5 billets verts et 3 rouges. On procède à l'expérience suivante : un dé ayant été jeté, on tire un billet de l'urne A si le nombre de points du dé est inférieur à 3, un billet de l'urne B sinon. Calculer la probabilité :

a) de tirer un billet vert,
b) de tirer un billet vert, sachant que le nombre de points obtenu est supérieur à deux,
c) d'avoir obtenu un nombre de points inférieur à 3, sachant que le billet tiré est rouge,
d) d'avoir obtenu un nombre de points supérieur à 2, sachant que le billet tiré est jaune.

4.3.18 Pour rien au monde Monsieur C ne raterait une course. Et pourtant sa calvitie précoce l'expose cruellement aux rayons du soleil (lorsqu'il y en a). C'est sans doute la raison pour laquelle il est arrivé 9 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses non ensoleillées et seulement 2 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses où le soleil se manifeste. Or, trois courses sur dix en moyenne sont ensoleillées. Quelle probabilité y a-t-il que le temps ait été maussade lors de la dernière course Morat-Fribourg si l'on sait que Monsieur C figure au palmarès en septième place ?

4.3.19 Étant donné deux urnes contenant respectivement 3 boules rouges, 1 verte, 2 jaunes et 2 boules rouges, 2 vertes, 2 jaunes. Considérons l'expérience consistant à choisir au hasard une urne, d'où l'on en extrait une boule, qu'on met ensuite dans l'autre urne. On tire alors une boule de cette dernière urne. Calculer la probabilité :

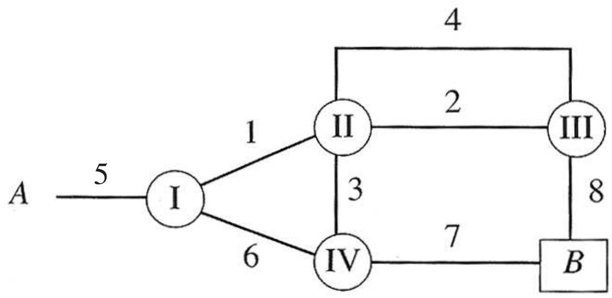
a) que cette boule soit rouge,
b) que cette boule soit rouge, si la première boule tirée était rouge,
c) que cette boule soit rouge, si l'urne tirée était U_1,
d) que l'on ait tiré l'urne U_1, si la dernière boule tirée était rouge.

4.3.20 Une boîte A contient 9 cartes numérotées de 1 à 9 et une boîte B contient 5 cartes numérotées de 1 à 5 . On choisit l'une des boîtes au hasard et on en extrait une carte. Si le numéro est pair, quelle est la probabilité que la carte provienne de A ?

4.3.21 La probabilité que trois tireurs atteignent une cible est 1/6 pour le premier, 1/4 pour le deuxième et 1/3 pour le troisième. Quelle est la probabilité, lors d'un tir d'ensemble, qu'au moins deux des tireurs atteignent la cible ?

4.3.22 Une urne contient 128 boules, dont x^2 sont blanches, toutes les autres étant rouges ($1 \leq x \leq 11$). On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. Déterminer x de telle manière que la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes soit maximale.

4.3.23 A veut se rendre chez son ami B mais il ignore l'emplacement de sa maison. Il se voit donc contraint d'examiner chaque maison le long des rues qu'il emprunte :



I, II, III et IV désignent des places, 1,2,...,8 désignent des rues.

A chacune des places qu'il atteint, il choisit au hasard la rue suivante. A est tenace et ne s'arrête pas tant qu'il y a de nouvelles maisons à examiner, mais il se refuse à examiner deux fois les maisons d'une même rue ; dans ce cas, il préfère renoncer à sa visite.

a) Dresser l'arbre de tous les parcours menant à B ou conduisant à l'abandon.

b) Calculer la probabilité que A découvre la maison de B.

c) Sachant qu'il est arrivé chez B, calculer la probabilité que A ait dû examiner un nombre maximum de rues.

4.3.24 On construit un modèle simplifié de prévision météorologique en disant que demain le temps sera le même qu'aujourd'hui avec la probabilité p. On suppose que le temps est sec ou humide, et qu'aujourd'hui, il est sec.

a) Montrer que la probabilité P_n qu'il soit sec dans n jours est donnée par :

$$P_n = \begin{cases} (2p-1)P_{n-1} + (1-p) & , \text{si } n \geq 1 \\ 1 & , \text{si } n = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que $P_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(2p-1)^n$, si $n \geq 0$.

c) En supposant $0 < p < 1$, quelle sera l'évolution météorologique du système à long terme ?

4.4 Evénements indépendants

4.4.1 On lance deux dés bien équilibrés, à savoir un rouge et un vert, et on considère les événements :

A : le dé rouge montre 3,

B : le dé vert montre 4.

C : la somme des dés est 7.

a) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

b) Les événements A, B et C sont-ils indépendants dans leur ensemble ?

4.4.2 Montrer que si deux événements sont indépendants et incompatibles, alors l'un d'entre eux au moins a une probabilité nulle.

4.4.3 Des appels reçus par une agence de voyage, 25% sont des demandes d'information et 75% sont des réservations. On suppose que les appels sont indépendants. Si l'agence reçoit six appels, calculer la probabilité qu'exactement quatre de ces appels soient des réservations.

4.4.4 On jette une pièce de monnaie 20 fois. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir :

a) 8 fois face ?

b) 9 fois face ?

c) 10 fois face ?

d) moins de 4 fois face ?

e) plus de 7 fois et moins de 13 fois face ?

4.4.5 Un fabricant prétend que seul le 4% des articles qu'il livre présentent un défaut. Pour vérifier ses dires on prélève au hasard, dans un lot d'articles très important, cinquante articles. Quelle probabilité a-t-on, si ses dires sont exacts, de trouver :

a) moins de trois articles défectueux ?

b) plus de quatre articles défectueux ?

4.4.6 Jean s'amuse à viser une quille avec une boule. L'expérience lui a appris qu'il renverse la quille 3 fois sur 10 en moyenne.

a) Quelle probabilité a-t-il de renverser la quille 4 fois au moins en lançant la boule 7 fois ?

b) Combien de fois doit-il lancer la boule s'il veut avoir plus de 90% de chances de renverser au moins une fois la quille ?

4.4.7 Une urne contient 3 boules rouges, 2 vertes et 5 noires. On en extrait successivement 5 boules avec remise. Quelle est la probabilité qu'on ait :

a) en tout 2 boules rouges, 2 vertes et 1 noire ?

b) en tout 1 boule rouge et 4 noires ?

c) au moins une boule de chaque couleur ?

4.5 Solutions des exercices

4.1.1 a) $\Omega = \{RR; RV; RB; VR; VV; VB; BR; BV; BB\}$;
b) $\Omega = \{RV; RB; VR; VB; BR; BV\}$.

4.1.2

a) $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$,
$E = \{PPP; PPF; PFP; FPP\}$;

b) $\Omega = \{PPP; PPF; PFF; FFF\}$, $E = \{PPP; PPF\}$; c) 16, 2^n.

4.1.3 Les événements sont : $\emptyset$, $\{G\}$, $\{N\}$, $\{P\}$, $\{G; N\}$, $\{G; P\}$, $\{N; P\}$, $\Omega = \{G; N; P\}$.

4.1.4 a) $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 4; 6\}$; $C = \{2; 3; 4; 5; 6\}$; $\overline{A} = \{4; 5; 6\}$;
$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $A \cap B = \{2\}$; b) non ; c) 64 ; d) 8.

4.1.5 $D = A \cap B \cap C$; $E = A \cap B$; $F = A \cup B \cup C$; $G = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;
$H = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

4.2.1 a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$.

4.2.2 a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{36}$.

4.2.3 a) $\frac{1}{1'785}$; b) $\frac{2}{595}$; c) $\frac{109}{357}$.

4.2.4 a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{5}{16}$.

4.2.5 a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{18}$; c) $\frac{1}{36}$; d) $\frac{1}{6}$; e) $\frac{1}{12}$; f) $\frac{35}{36}$.

4.2.6 $\frac{858}{20'825}$.

4.2.7 15 boules noires.

4.2.8 a) $\sim 0,047$; b) $\sim 5,602 \cdot 10^{-4}$; c) $\sim 3,361 \cdot 10^{-3}$; d) $\sim 0,545$; e) $\sim 0,386$; f) $\sim 0,009$; g) $\sim 0,102$.

4.2.9 a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{7}{10}$.

4.2.10 a) 73/543 ; b) 306/543.

4.2.11 $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{A}) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$; $P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{5}$; $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{10}$;
$P(\overline{A} \cup B) = \frac{9}{10}$; $P(A \cup \overline{B}) = \frac{4}{5}$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{5}$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{7}{10}$.

4.2.12 Non, car $P(A \cup B) = 1,1 > 1$.

4.2.13 –

4.2.14 a) 14% ; b) 6% ; c) 10% ; d) 86%.

4.2.15 a) 40% ; b) 10%.

4.2.16 a) 96% ; b) 4% ; c) 19% ; d) 22%.

4.2.17 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(C) = \frac{1}{5}$.

4.2.18 a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{7}{20}$; c) $\frac{19}{40}$.

4.2.19 $\frac{30}{61}$.

4.3.1 $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(A|B) = \frac{2}{15}$; $P(A|C) = \frac{1}{9}$; $P(A|\overline{B}) = \frac{1}{6}$; $P(A|\overline{C}) = \frac{1}{6}$.

4.3.2 $P(B|A) = \frac{1}{9}$; $P(A|C) = \frac{3}{4}$; $P(B|C) = \frac{1}{12}$; $P(C|B) = 1$.

4.3.3 $P(A|B) = \frac{2}{5}$; $P(B|A) = \frac{2}{3}$.

4.3.4 a) $\sim 7,07 \cdot 10^{-7}$; b) $\sim 1,7 \cdot 10^{-5}$; c) $\sim 1,78 \cdot 10^{-3}$; d) $\sim 0,337$; e) $\sim 0,3895$; f) $\sim 0,313$.

4.3.5 –

4.3.6 a) $\sim 0,0143$; b) $\sim 0,9857$; c) $\sim 0,0143$; d) $\sim 0,2286$; e) $\sim 0,0286$; f) $\sim 0,0286$; g) $\sim 0,0286$.

4.3.7 a) $\sim 0,2143$; b) $\sim 0,0357$; c) $\sim 0,7857$; d) i) $\frac{3}{11}$, ii) $\frac{5}{13}$, iii) $\frac{3}{7}$.

4.3.8 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{2}{15}$; d) $\frac{2}{15}$.

4.3.9 a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{2}$.

4.3.10 $\frac{1}{2}$.

4.3.11 $\frac{3}{4}$.

4.3.12 $\frac{3}{11}$.

4.3.13 a) 30% ; b) 10% ; c) 50% ; d) 40% ; e) $\frac{2}{7}$.

4.3.14 a) $\frac{173}{360}$; b) $\frac{45}{173}$.

4.3.15 a) $\frac{17}{30}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{17}$.

4.3.16 a) $0,512$; b) $0,688$.

4.3.17 a) $\frac{29}{60}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{7}$; d) 0.

4.3.18 $\frac{21}{23}$.

4.3.19 a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{17}{35}$; c) $\frac{5}{14}$; d) $\frac{3}{7}$.

4.3.20 $\frac{10}{19}$.

4.3.21 $\frac{11}{72}$.

4.3.22 $x = 8$.

4.3.23 a) - ; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{8}$.

4.3.24 a) - ; b) - ; c) $\frac{1}{2}$.

4.4.1 a) oui ; b) non.

4.4.2 –

4.4.3 $\sim 0,30$.

4.4.4 a) $\sim 0,12$; b) $\sim 0,16$; c) $\sim 0,18$; d) $\sim 0,0013$; e) $\sim 0,74$.

4.4.5 a) $\sim 0,68$; b) $\sim 0,05$.

4.4.6 a) $\sim 0,126$; b) au moins 7 fois.

4.4.7 a) $0,054$; b) $\sim 0,094$; c) $0,507$.