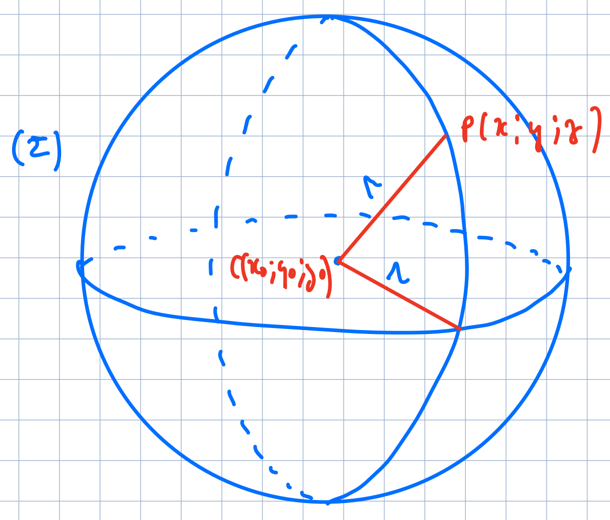
La sphère

1) Définition :



On appelle sphère Σ de centre C et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des points P de l'espace situés à la distance r du centre C.

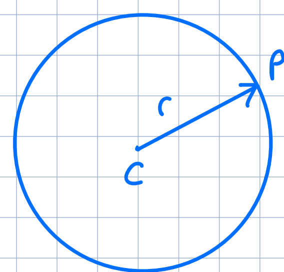
=> On a donc :

$$\boxed{P \in \Sigma \iff \delta(C;P) = \|\overrightarrow{CP}\| = r}$$

2) Équation cartésienne de la sphère :

On considère une sphère Σ de centre $C(x_0 ; y_0 ; z_0)$ de rayon r et un point $P(x ; y ; z)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :



a) $P \in \Sigma$: le point P appartient à la sphère Σ

b) $\|\vec{CP}\| = r \iff \|\vec{CP}\|^2 = r^2$

c) $\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2}$

Cette dernière expression constitue l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $C(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon r.

- En développant l'équation cartésienne $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow$ On constate, dans cette équation du deuxième degré en x, y et z, que

a) les coefficients de x^2, y^2 et de z^2 sont égaux et non nuls ;

b) Il n'y a pas de terme en xy, xz et yz.

- Réciproquement, toute équation du deuxième degré en x, y et z telle que :

a) les coefficients de x^2, y^2 et de z^2 sont égaux et non nuls,

b) Il n'y a pas de terme en xy, xz ou yz,

c'est-à-dire toute équation de la forme $ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+C=0$

avec $a \neq 0$, est soit celle d'une sphère, soit celle de la figure vide.

! Notez bien la ressemblance avec l'équation d'un cercle : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Le terme supplémentaire $(z-z_0)^2$ dans l'équation de la sphère est dû au fait qu'elle est un objet spatial, à trois dimensions, alors que le cercle est une courbe plane, à deux dimensions.

3) plan tangent à une sphère :

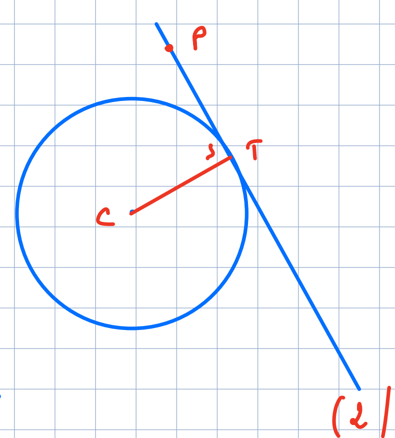
On considère une sphère Σ de centre $C(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon r et un point $T(x_1;y_1;z_1)$ situé sur la sphère.

$\Rightarrow$ Le plan tangent à la sphère de centre C et de rayon r au point $T(x_1;y_1;z_1)$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)+(z_1-z_0)(z-z_0)=r^2}$$

* Preuve :

On considère une sphère Σ de centre $C(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon r, un point $T(x_1;y_1;z_1)$ situé sur la sphère Σ, le plan tangent (α) à la sphère Σ au point T et $P(x;y;z)$ un point de l'espace.



Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $P \in \alpha$

ii) $\vec{CT} \perp \vec{TP}$

iii) $\vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0$

iv) $\vec{CT} \cdot (\vec{TC} + \vec{CP}) = \vec{CT} \cdot (\vec{CP} - \vec{CT}) = \vec{CT} \cdot \vec{CP} - \vec{CT} \cdot \vec{CT} = 0$

v) $\vec{CT} \cdot \vec{CP} = \vec{CT} \cdot \vec{CT} = \| \vec{CT} \|^2 = r^2$

vi)

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = r^2$$

En conclusion, l'équation du plan tangent en un point $T(x_1 ; y_1 ; z_1)$ de la sphère de centre $C(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon r est donnée par la formule :

$$\boxed{(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = r^2}$$

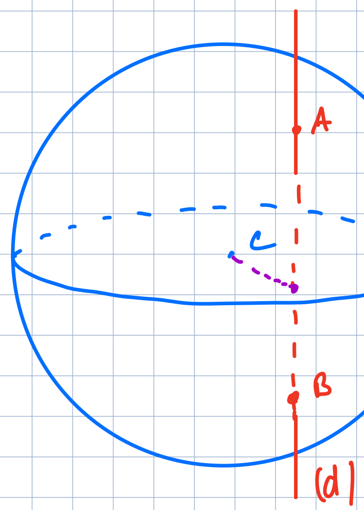
* <u>Définition :</u>

Un plan tangent à la sphère $\Sigma(C ; r)$ est un plan situé à la distance r de C.

* <u>Propriété :</u>

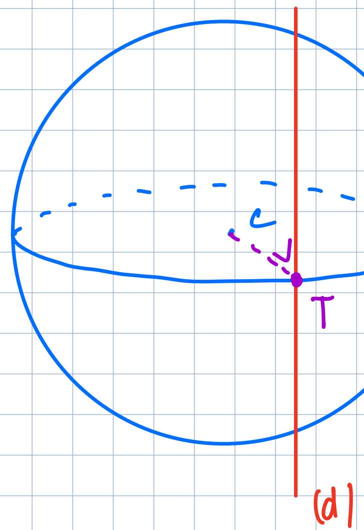
Le plan tangent à la sphère $\Sigma(C ; r)$ au point T a pour vecteur normal $\vec{CT}$.

4) Positions relatives d'une droite et d'une sphère :



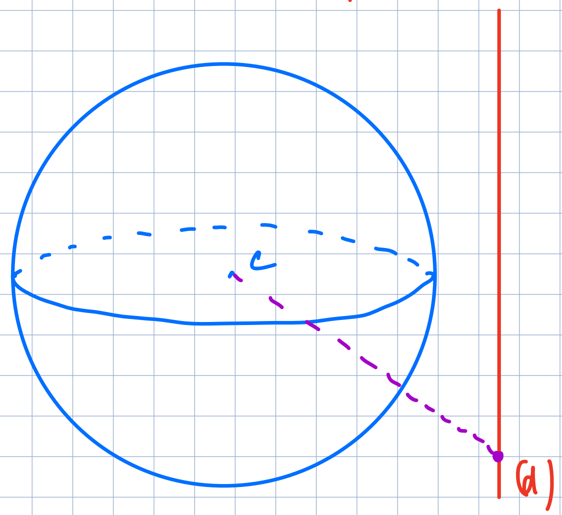
$\delta(C\,;d) < r$

$\Rightarrow$ Deux points A et B d'intersection.



$\delta(C\,;d) = r$

$\Rightarrow$ un unique point T d'intersection.



$\delta(C\,;d) > r$

$\Rightarrow$ aucun point d'intersection.

* Définition :

Une droite tangente à la sphère $\Sigma(C ; r)$ est une droite située à la distance r de C

* Calcul de l'intersection d'une droite et d'une sphère :

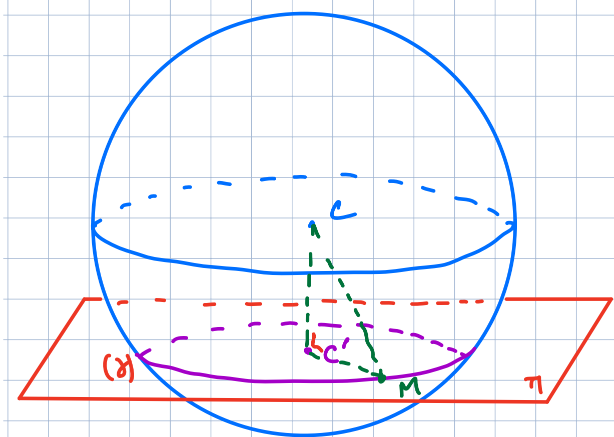
=> Méthode :

- Substituer les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne de la sphère Σ.

- On obtient alors une équation de degré 2 à une inconnue (le paramètre), qu'on résout.

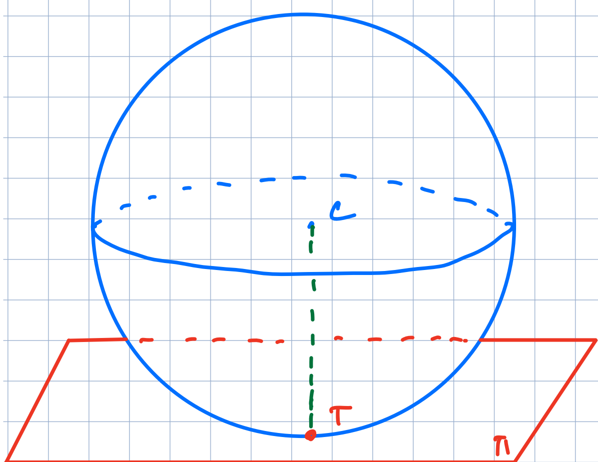
  - Si cette équation admet 2 solutions, alors l'intersection est constituée de 2 points A et B. On obtient ces points en injectant les valeurs obtenues du paramètre dans les équations de la droite d.
  - Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point T, d est tangent à la sphère Σ en T.
  - Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

5) positions relatives d'un plan et d'une sphère :



$\delta(C\,;\pi) < r$

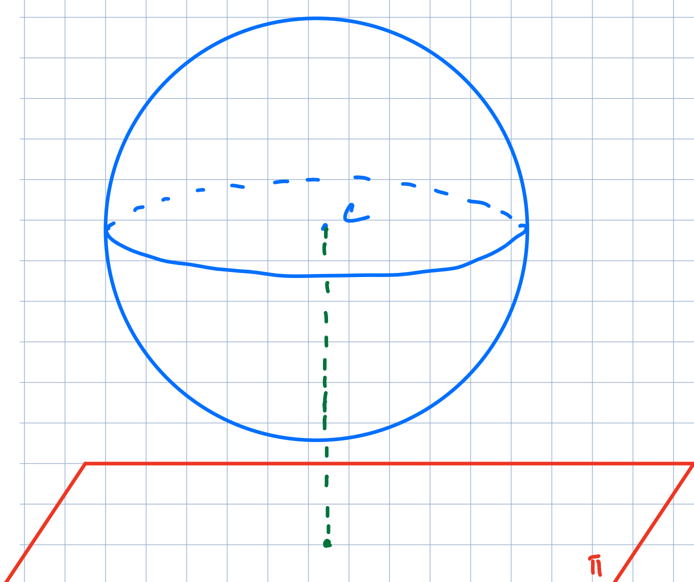
$\Rightarrow$ un cercle (γ) d'intersection.



$\delta(C\,;\pi) = r$

$\Rightarrow$ un unique point T d'intersection

(plan π est tangent à Σ)



$\delta(C\,;\pi) > r$

$\Rightarrow$ Aucun point d'intersection.

! Remarque :

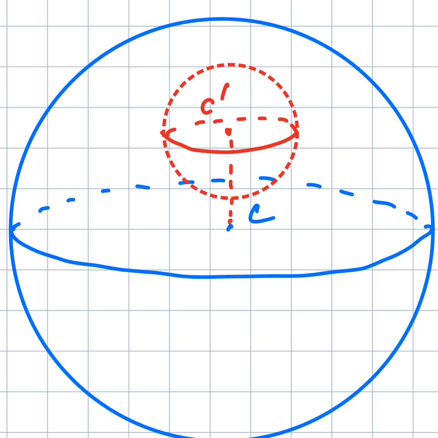
- Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On définit un cercle de l'espace en donnant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

- Le plan tangent en un point T à la sphère $\Sigma(C;r)$ contient toutes les droites tangentes en T à cette sphère.

6) Positions relatives de deux sphères :

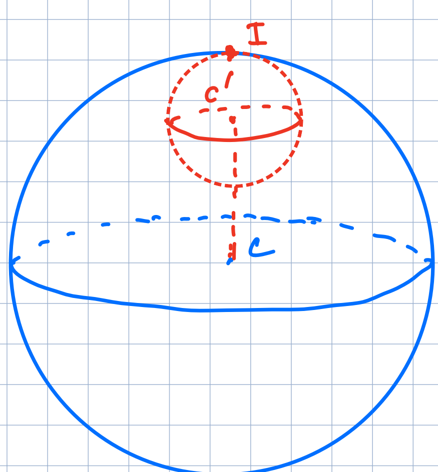
$\Sigma(C;r)$, $\Sigma'(C';r')$

avec $r > r'$



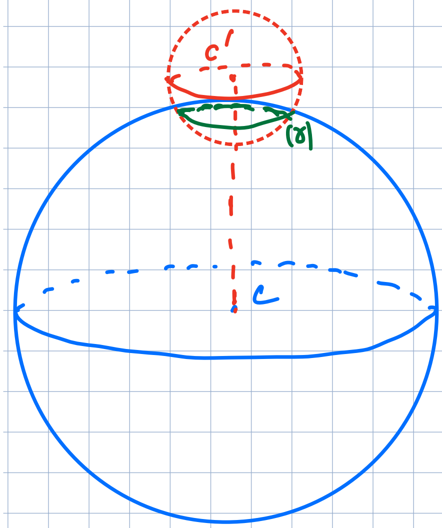
$\delta(C;C') < r - r$

$\Rightarrow$ intersection : $\emptyset$



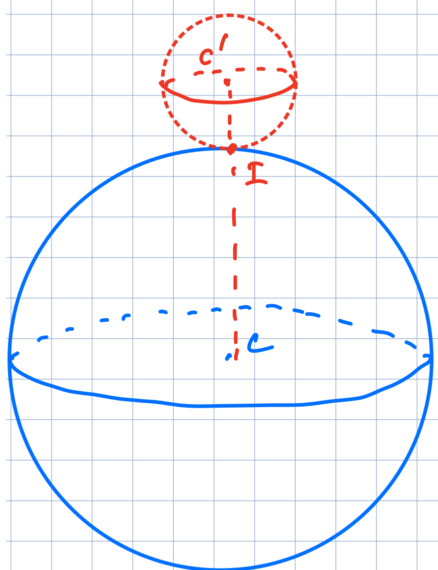
$\delta(C;C') = r - r'$

$\Rightarrow$ Intersection : un point I



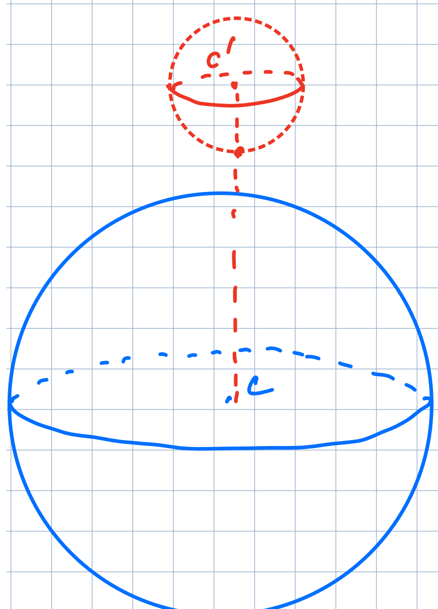
$$\begin{cases} \delta(c\,;c') > r - r' \\ \delta(c\,;c') < r + r' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Intersection : un cercle (γ)



$$\delta(c\,;c') = r + r'$$

$\Rightarrow$ Intersection : un point I



$$\delta(c\,;c') > R + r'$$

$\Rightarrow$ Intersection : $\emptyset$