1 Primitives et intégrales indéfinies

Commençons par un exemple. Quelle est la fonction dont la dérivée est $f'(x) = 2x$? La réponse est immédiate: $f(x) = x^2$. Mais nous aurions pu proposer aussi $f(x) = x^2 + 1$ ou $f(x) = x^2 - 5$. Plus généralement, toute fonction du type $f(x) = x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ satisfait $f'(x) = 2x$.

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (ou plus généralement sur une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable F est une **primitive de f sur I** si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple
$f(x) = 3x$, alors on peut avoir la primitive $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ ou $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2+1$. De manière générale, la primitive de $f(x) = 3x$ sera donnée par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Théorème (Famille de primitives)

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

1.2 Définition

L'intégrale indéfinie de $f(x)$ est la famille de fonctions de la forme $F(x) + c$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et $c \in \mathbb{R}$.

Notation
L'intégrale indéfinie de $f(x)$ se note $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ où

- $\displaystyle\int$ est le **signe d'intégration**,
- $f(x)$ est la fonction à intégrer (dite aussi intégrande),
- dx est l'élément différentiel qui indique par rapport à quelle variable on intègre,
- c est la **constante d'intégration**.

1.3 Primitives de fonctions élémentaires

A partir des dérivées connues, on peut retrouver un certain nombre de primitives de fonctions élémentaires.

Fonction élémentaire $f(x)$	Primitive $\int f(x)\,dx$
1	$x + c$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$cos(x)$	$sin(x) + c$
$sin(x)$	$-cos(x) + c$

Théorème (Produit par un réel)
Soit $k \in \mathbf{R}$. Si F est une primitive de f, alors kF est une primitive de kf.

$$\int [kf(x)]\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Théorème (Somme de fonctions)
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$.

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Exemples

1. $\int (x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + c$
2. $\int (3x-1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 - x + c$
3. $\int (x^2-5x+6)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + c$
4. $\int (\frac{5x^4}{3} - \frac{3x^2}{4} + 1)\,dx = \frac{5}{3}\frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}\frac{x^3}{3} + x + c$
5. $\int (x-1)^2\,dx = \int (x^2-2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$
6. $\int (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3} + c$

1.4 Primitives de fonctions composées

Ci-dessous, quelques primitives de fonctions composées.

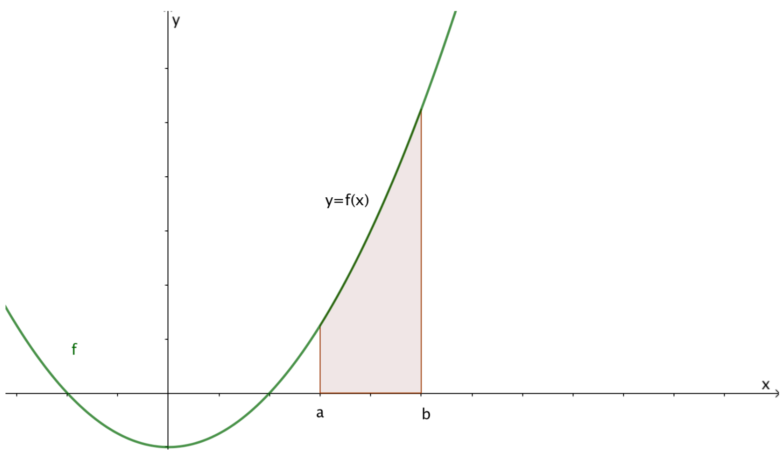
Fonction composée $f(x)$	Primitive $f(x)$
$u'(x) \cdot u^n(x), \quad n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1} \cdot u^{n+1}(x) + c$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$u'(x) \cdot cos(u(x))$	$sin(u(x)) + c$
$u'(x) \cdot sin(u(x))$	$-cos(u(x)) + c$

Théorème

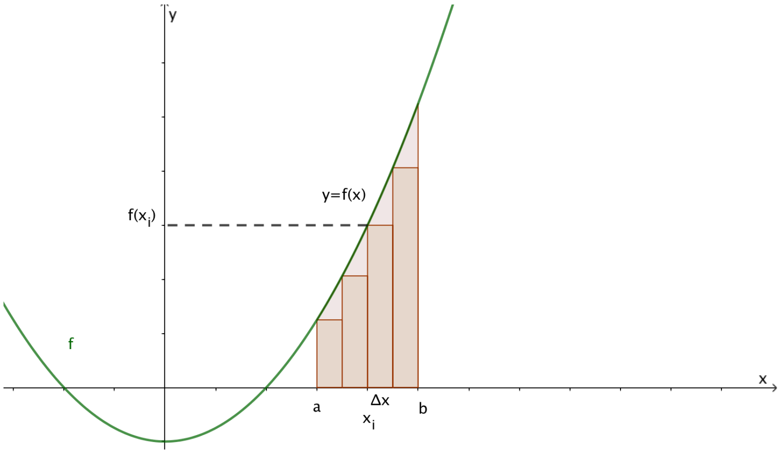
$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x)) + c \text{ où } F \text{ est une primitive de } f$$

2 Intégrales définies

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On veut calculer l'aire entre le graphe et l'axe des abscisses dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.



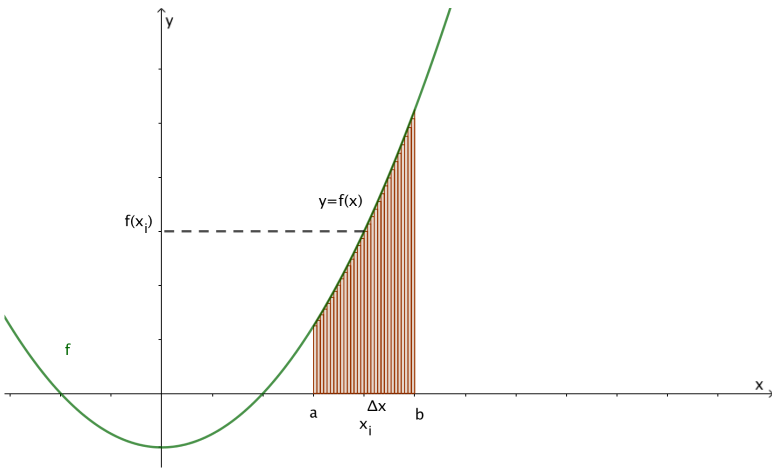
L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a\,;\,b]$ en plusieurs sous-intervalles de même largeur $[x_0\,;\,x_1]$, $[x_1\,;\,x_2]$, ... $[x_{n-1}\,;\,x_n]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.
La largeur de chaque sous-intervalle vaut: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$



Pour chaque $i = 0,1,2,3,...,n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i\,; x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.
On calcule ensuite l'aire de chaque rectangle de largeur Δx compris entre la fonction et l'axe des abscisses.
Ainsi l'aire du $i^{\text{ème}}$ rectangle vaut: Aire $= f(x_i) \cdot \Delta x$
L'aire totale des n rectangles vaut ainsi:

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Lorsque le nombre n de rectangles augmente, la largeur de chaque rectangle diminue. Par conséquent, l'approximation de l'aire sous la courbe devient plus précise.



En faisant tendre n vers l'infini, on obtient exactement l'aire A.

$$A(n) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

2.1 Définition

On appelle **intégrale définie** de la fonction $f(x)$ de a à b le calcul de la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x$$

que l'on notera $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Les nombres a et b sont appelés **bornes d'intégration** et x **variable d'intégration**. Le symbole dx est insécable (on ne peut pas séparer le d du x), il indique que l'on intègre par rapport à x et il se place toujours en dernière position et marque la fin de l'intégrale.

L'usage de la définition de l'intégrale définie sous forme d'une limite d'une somme se révèle très peu pratique car cette méthode demande des calculs très longs. Cependant, pour les fonctions dont on peut connaître une primitive, il existe une alternative plus simple. Ce lien entre l'intégrale définie et intégrale indéfinie s'appelle le théorème fondamental du calcul intégral.

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et $F(x)$ une primitive de la fonction f. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notation Par commodité, on notera $F(b)-F(a)$ par $F(x)\mid_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$, qui se lit $f(x)$ *évaluée entre a et b.*

Exemples

1. $\displaystyle\int_2^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\mid_2^3 = \frac{1}{4}\cdot 81 - \frac{1}{4}\cdot 16 = \frac{65}{4}$
2. $\displaystyle\int_0^5 (3x^2-4x+5)\,dx = [x^3-2x^2+5x]_0^5 = 125-50+25-0 = 100$

La constante c n'a pas d'influence donc on se permettra alors de ne plus l'indiquer.

2.2 Propriétés de l'intégrale définie

Soit f et g , deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et k un réel.

1. Intégrale d'une somme: $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. Produit par un réel: $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. Chemin continu: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad$ avec $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$

4. Chemin opposé: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Remarques

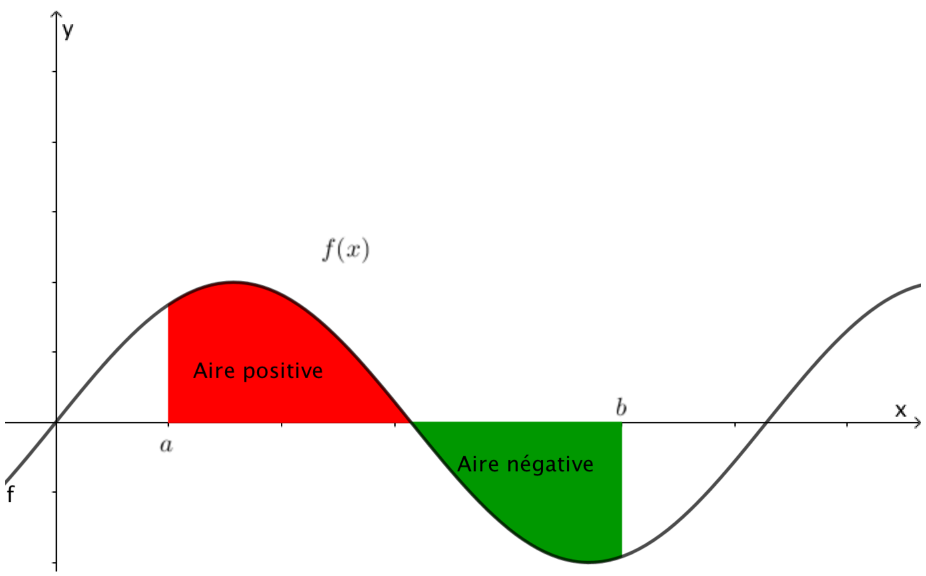
1. Dans nos calculs, on a supposé la fonction positive. Le cas contraire se traite facilement grâce au concept d'**aire algébrique** suivant.

   L'intégrale définie suivante $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire sous la courbe de f entre les droites verticales $x = a$ et $x = b$ pour une fonction positive. Si la fonction est négative, le calcul de l'intégrale est similaire, mais donnera une valeur négative puisque chaque $f(x_i)$ est négatif.

   (a) Si $f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

   (b) Si $f(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

2. Si la fonction change de signe sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, on scinde l'intervalle en portions à partir du signe de la fonction et on calcule l'intégrale par morceaux.



3 Calcul de l'aire géométrique "sous une courbe" ou entre deux courbes

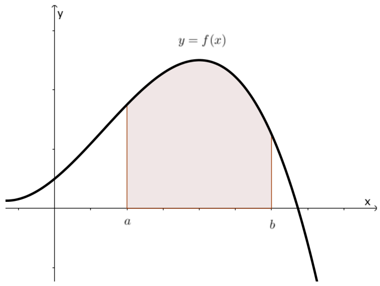
3.1 Aire géométrique "sous une courbe"

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

Afin d'interpréter géométriquement l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, on considère le domaine borné D délimité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

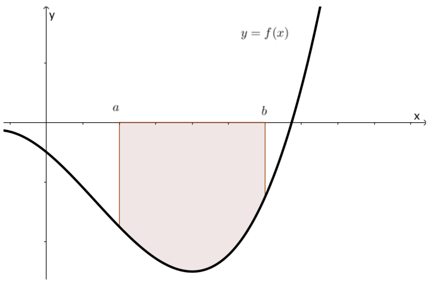
Cas 1:

Si f est positive sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'aire du domaine D.



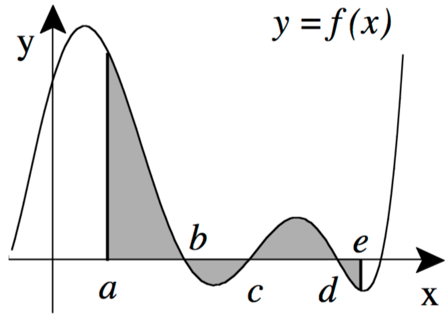
Cas 2:

Si f est négative sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'opposé de l'aire du domaine D.
Donc $A = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (*Changement de signe obligatoire*)



Cas 3:

Si f change de signe sur $[a\,;\,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à la somme des aires munies chacune d'un signe. Les aires des parties de D situées au-dessus de l'axe Ox sont comptées positivement et les autres négativement.
Donc $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx$

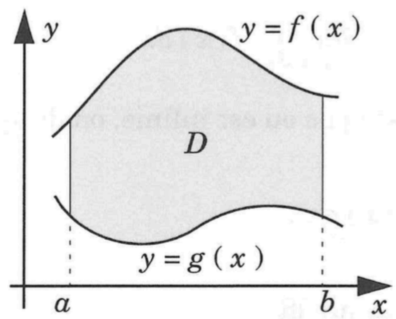


3.2 Aire d'une région située entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x de $[a\,;\,b]$ et D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. On veut calculer l'aire A du domaine D.

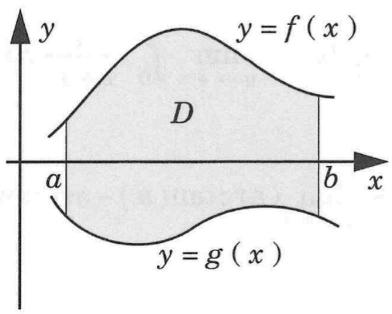
Si g est positive sur $[a\,;\,b]$, alors A= "Aire sous f" - "Aire sous g", donc

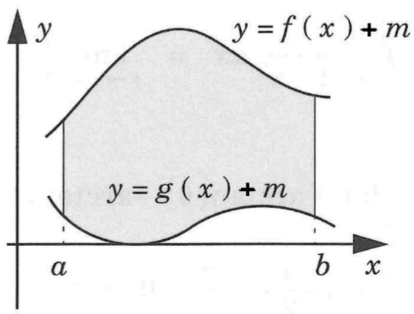
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Si g est négative sur $[a\,;\,b]$, on translate les graphes de f et g d'une même constante m vers le haut de telle sorte que $g(x) + m \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ ainsi:

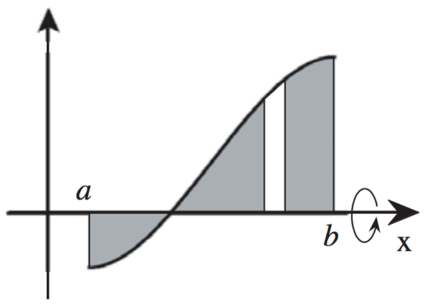
$$A = \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

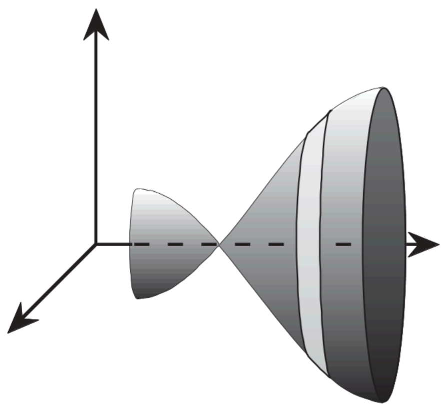




4 Volume d'un solide de révolution

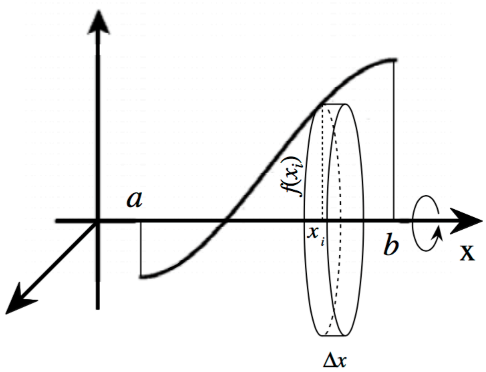
Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$ et D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
On veut calculer le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox.

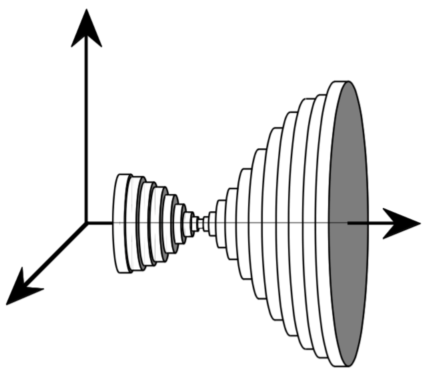




Méthode des disques

On partage l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles de largeur identique: $[x_0\,;\,x_1]$, $[x_1\,;\,x_2]$, ... $[x_{n-1}\,;\,x_n]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.
La largeur de chaque sous-intervalle vaut: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
Pour chaque $i = 0,1,2,3,...,n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i\,;\,x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.





Losqu'ils tourneront autour de l'axe Ox, chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume $\pi[f(x_i)]^2\Delta x$.

Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres:

$$V = \lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_i)]^2\Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Par conséquent,

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$