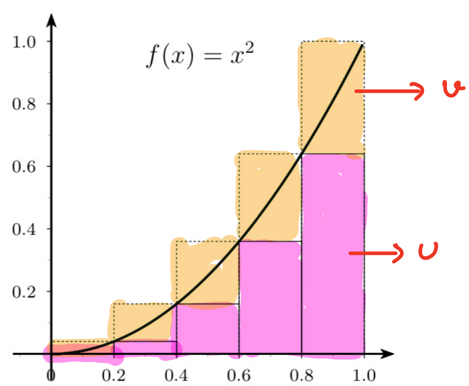
3MRf

Approche géométrique de l'aire sous une courbe

2.1 Approche géométrique de l'aire sous une courbe

2.1.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.



a) Estimer A à l'aide de la somme u_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme v_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

b) Améliorer l'estimation de A en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles d'égale longueur.

c) Calculer u_n et v_n en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'égale longueur.

d) Calculer la valeur exacte de A en utilisant les suites u_n, v_n et le théorème des deux gendarmes.

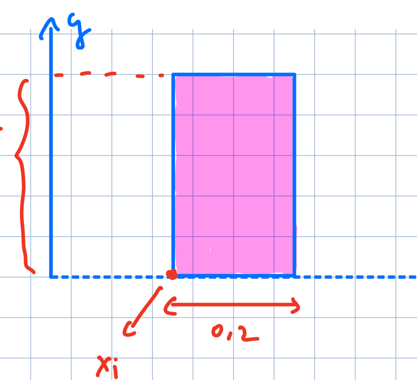
a)

base $= 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

$f(x_i) = (x_i)^2$

* $U_5 = 0 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2$

hauteur : $x_i = 0{,}2 \to f(x_i) = x_i^2 = 0{,}2^2$



$U_5 = 0{,}2\left(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2\right) = \boxed{0{,}24}$

$$* \ v_5 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}2$$

$$= 0{,}2 \left(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2 + 1 \right) = \boxed{0{,}44}$$

b) $$u_{10} = 0 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}1 + \cdots + 0{,}9^2 \cdot 0{,}1$$

$$= 0{,}1 \left(0{,}1^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + \cdots + 0{,}9^2 \right) = \boxed{0{,}29}$$

$$v_{10} = 0{,}1^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}1 + \cdots + 1^2 \cdot 0{,}1$$

$$= 0{,}1 \left(0{,}1^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + \cdots + 1^2 \right) = \boxed{0{,}39}$$

c) $$u_n = 0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right]$$

$$v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right]$$

On peut écrire également : (Tables numériques formule CRM p. 15 (2e formule))

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\frac{1}{6}(n-1)\cancel{n}(2n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \boxed{\frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}}$$

$$v_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} \overset{\text{idem}}{=} \frac{1}{\cancel{n}} \, \frac{\frac{1}{6} \cdot \cancel{n}(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{6} \, \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \boxed{\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}}$$

d) On peut donc écrire, pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{2n^2-3n+1}{6n^2} & < & \displaystyle\int_0^1 x^2 \, dx & < & \dfrac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \text{pas de choix}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty} \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} \end{array}$$

On peut vérifier le résultat :

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$