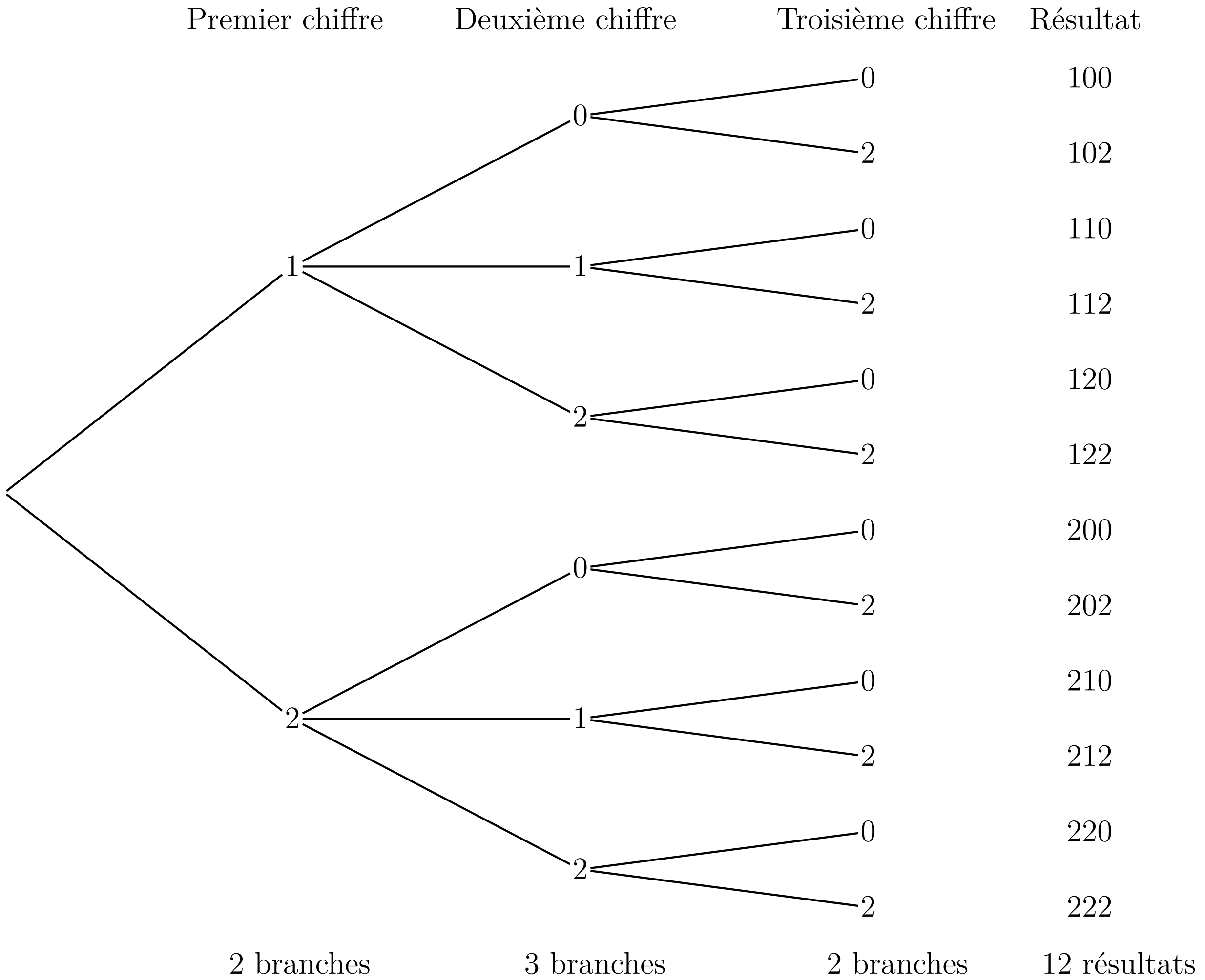
# Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.

### 1) Principe multiplicatif

On essaye souvent de décomposer un problème de combinatoire en $k$ étapes successives indépendantes les unes des autres ; on utilise alors le principe multiplicatif :
Si $n_1, n_2, ..., n_k$ sont les nombres de choix possibles correspondants à chacune des $k$ étapes, alors le nombre de choix total est égal $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

**Exemple :**
Combien de nombres pairs de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1 et 2 ?
On peut utiliser un schéma en arbre pour représenter l'ensemble des solutions :



On constate que l'on peut former $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ nombres.

**Remarque :**
Le plus souvent, les arbres sont gigantesques, donc pratiquement irréalisables. Aussi l'analyse combinatoire ne consiste-t-elle pas à énumérer toutes les possibilités (démarche longue et fastidieuse), mais à les dénombrer, c'est-à-dire à simplement calculer leur nombre.

### 2) Factorielle

On appelle factorielle du nombre entier (positif) $n$ le nombre produit des n entiers de 1 à $n$, et on écrit :

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*}$$

Le nombre $n!$ se lit " $n$ *factorielle*".
On étend la définition à 0 en posant $0! = 1$

**Exemple :**
Calculer 8!
$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

**Remarque :**
Les méthodes de dénombrement se classeront selon trois catégories :

- les permutations
- les arrangements
- les combinaisons

### 3) Permutations simples

On dispose de $n$ objets distincts. Une permutation simple de $n$ objets est une manière de placer ces $n$ objets distincts sur une rangée.
Le nombre de permutations simples de $n$ objets distincts est noté $P_n$ et vaut :

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

**Explication :**
On peut comprendre cette formule de manière suivante : il y a $n$ choix pour placer le $1^{\text{er}}$ objet, $n-1$ choix pour le $2^{\text{e}}$, ..., 2 choix pour l'avant dernier et 1 choix pour le dernier.

**Exemple :**
De combien manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?
Il y a 5 choix pour la $1^{\text{er}}$ place, 4 choix pour la $2^{\text{e}}$ place, puis 3 choix, puis 2 puis 1 choix.
Donc il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manières différentes de placer ces 5 personnes.

### 4) Permutations avec répétitions

On dispose de $n$ objets. Parmi ces $n$ objets, il y a $k$ types différents. On suppose qu'il y a $r_1$ objets du $1^{\text{er}}$ type, $r_2$ objets du $2^{\text{e}}$ type, ... où $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$.
Une permutation avec répétition de ces $n$ objets est une permutation de ces $n$ objets, dans laquelle on ne distingue pas les objets d'un même type. Le nombre de permutations avec répétitions de $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$ objets se note $\overline{P_n}(r_1; r_2; ...; r_k)$ et vaut :

$$\boxed{\overline{P_n}(r_1; r_2; ...; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} \qquad \text{avec} \;\; r_1 + r_2 + ... + r_k = n}$$

**Explication :**
Il y a $n!$ permutations possibles de ces $n$ objets, parmi lesquelles il y a $r_1!$ permutations des objets du premier type, qu'on ne distingue pas, il y a $r_2!$ permutations des objets du deuxième type, qu'on ne distingue pas, etc.
Dans les $n!$ permutations des objets, on en compte $r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!$ fois trop.

**Exemple :**
Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot "ENTENTE" ?
Dans le mot "ENTENTE", il y a 3 "E", 2 "N" et 2 "T". Il s'agit donc d'une permutation $\overline{P_7}(3; 2; 2)$. On a :

$$\overline{P_7}(3; 2; 2) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210 \text{ d'anagrammes.}$$

### 5) Arrangements simples

On dispose de $n$ objets distincts. Un arrangement simple (sans répétition) de $n$ objets pris $p$ à la fois, est une manière de choisir $p$ (avec $p \leq n$) objets parmi $n$. L'ordre compte.
Le nombre d'arrangements simples de $n$ objets distincts pris $p$ à la fois, est noté $A_p^n$ et vaut :

$$\boxed{A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

**Explication :**
Il y a $n$ choix pour le $1^{\text{er}}$ objet, $n-1$ choix pour le $2^{\text{e}}$, $n-2$ pour le $3^{\text{e}}$, ..., $n-p+1$ pour le $p^{\text{e}}$.

**Exemple :**
Calculer le nombre de tiercés possibles lorsque 18 chevaux prennent le départ.
Le nombre de tiercés possibles est :

$$A_3^18 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4896$$

### 6) Arrangements avec répétitions

On dispose de $n$ objets distincts. Un arrangement avec répétition de $n$ objets pris $p$ à la fois, est une manière de choisir $p$ objets parmi ces $n$ objet, le même objet pouvant être pris plusieurs fois. L'ordre compte.
Le nombre d'arrangements avec répétitions de $n$ objets distincts pris $p$ à la fois, est noté $\overline{A_p^n}$ et vaut :

$$\boxed{\overline{A_p^n} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p \text{ fois}} = n^p \qquad (p \text{ peut être supérieur à } n)}$$

**Explication :**
Il y a $n$ choix pour le 1$^{\text{er}}$ objet, $n$ pour le 2$^{\text{e}}$, $n$ pour le 3$^{\text{e}}$, ..., $n$ pour le $p^{\text{e}}$.

**Exemple :**
En lançant 4 fois de suite un dé standard, combien de séquences différentes peut-on obtenir ?
Il y a 6 résultats pour le 1$^{\text{er}}$ lancer, 6 résultats pour le 2$^{\text{e}}$ lancer, 6 résultats pour le 3$^{\text{e}}$ lancer, 6 résultats pour le 4$^{\text{e}}$ et dernier lancer.
Donc il y a $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ séquences possibles.

### 7) Combinaisons simples

On dispose de $n$ objets distincts. Une combinaison simple (sans répétition) de $n$ objets pris $p$ à la fois, est un choix de $p$ (avec $p \leq n$) objets parmi $n$. L'ordre ne compte pas.
Le nombre de combinaisons simples de $n$ objets distincts pris $p$ à la fois, est noté $C_p^n$ et vaut :

$$\boxed{C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!}}$$

**Exemple :**
Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.
De combien de manières peut-on retirer 3 boules de l'urne ?
Si on tenait compte de l'ordre, il y aurait $A_3^6$ tirages possibles. Mais parmi ces tirages, il y en a chaque fois $3!$ qui font apparaître les mêmes boules, mais dans un ordre différent. Vu que l'ordre ne compte pas ici, il y a :

$\dfrac{A_3^6}{P_3} = \dfrac{120}{6} = 20$ manières de retirer 3 boules de l'urne.

### 8) Combinaisons avec répétitions

Nombre de combinaisons avec répétitions de $p$ objets choisis parmi $n$ (ici, $p$ peut être supérieur à $n$).

$$\boxed{\overline{C_p^n} = C_p^{n+p-1} = \overline{P}_{p+n-1}(p; n-1)}$$

**Exemple :**
Muni de 5 "Bons pour une boisson", vous allez les chercher à un bar qui propose 8 sortes de boissons. Combien de plateaux de boissons différents pouvez-vous ramener à vos amis ?

$\overline{C_5^8} = C_5^{8+5-1} = C_5^{12} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$

**Exercices**

1. Combien de mots différents de quatre lettres alternant consonne et voyelle peut-on former si la première lettre est une consonne et qu'on ne peut pas utiliser deux fois la même lettre ?
2. Un cadenas à numéros a trois roue ; chacune porte les numéros 0 à 9. Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?
3. Combien y a -t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ? A raison de 10 secondes par permutation, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?
4. De combien façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?
5. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot " SAUSSURE" ?
6. Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les 11 joueurs ainsi que l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?
7. Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?
8. Au jass, on reçoit 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien de combinaisons différentes existe-t-il ?
9. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. De combien de manière peut-on retirer 3 boules de l'urne ?
10. Combien y a-t-il de dominos si 10 symboles différents sont possibles ?
11. D'un jeu de 52 cartes, on tire 2 cartes simultanément (sans remise). De combien de manières différentes est-ce possible ?
12. Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si :
    a) on utilise chaque lettre une seule fois
    b) on peut réutiliser les lettres.
13. a) De combien de façons peut-on choisir un bouquet de 7 fleurs parmi 12 ?
    b) Les 12 fleurs se répartissent en 8 roses et 4 gerberas. De combien de façons peut-on composer un bouquet de 7 fleurs, si l'on veut :
    i) 4 roses et 3 gerberas ?
    ii) au moins 1 gerbera ?

**Corrigé**

1. On décompose en étapes successives :
   - on commence par choisir une consonne : 2o choix possibles
   - puis on choisit une voyelle : 6 choix possible
   - encore une consonne, mais différente de la 1re : 19 choix possibles
   - et enfin encore une voyelle différente de la 1re : 5 choix possibles
   Finalement, il y a : $20 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 5 = 11\,400$ : 19 choix possibles.
2. Chaque roue du cadenas représente une expérience. Le nombre de possibilités totales est donc, en appliquant le principe du dénombrement : $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, c'est en fait tous les nombres de 000 à 999.
3. Il y a $P_{12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$ possibilités d'aligner ces 12 élèves.

   Il faudrait $\dfrac{4\,790\,016\,000}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 151,786$ années pour épuiser toutes ces possibilités.
4. Il s'agit de dénombrer les permutations de 36 objets tous distinguables :

   $P_{36} = 36! \cong 3,7 \cdot 10^{41}$
5. Dans le mot "SAUSSURE", il y a 3 "S", 2 "U", 1 "A", 1 "E" et 1 "R". Il s'agit donc d'une permutation $\overline{P_8}(3;2)$. On a :

   $\overline{P_8}(3;2) = \dfrac{8!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 3\,360$ d'anagrammes.

6. On choisit 5 joueurs parmi 11, sans répétition, l'ordre étant important. Il s'agit d'un arrangement simple :

   $A_5^1 1 = \dfrac{11!}{(11-5)!} = \dfrac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$

7. Il faut choisir 7 chiffres parmi les 10 chiffres existants, les répétitions sont possibles et l'ordre est important. Il s'agit d'un arrangement avec répétition.

   $\overline{A_7^{10}} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7 = 10\,000\,000$
8. Il faut choisir 9 cartes parmi 36 toutes différentes ; les répétitions sont impossibles et l'ordre n'est pas important. Il s'agit d'une combinaison simple.

   $C_9^{36} = \dbinom{36}{9} = \dfrac{36!}{(36-9)!\,9!} = \dfrac{36!}{9!\,27!} = 94\,143\,280$
9. Si on tenait compte de l'ordre, il y aurait $A_3^6$ tirages possibles. Mais parmi ces tirages, il y en a chaque fois 3 ! qui font apparaître les mêmes boules, mais dans un ordre dif-

férent. Vu que l'ordre ne compte pas ici, il y a :

$\dfrac{A_3^6}{P_3} = \dfrac{120}{6} = 20$ manières de retirer 3 boules de l'urne.

10. Les 10 symboles différents représentent les chiffres de 0 à 9 (le 0 est représenté par une absence de marquage sur le domino). Il faut choisir pour chaque domino 2 symboles ; la répétition est possible et l'ordre n'est pas important :

$$\overline{C_2^{10}} = C_2^{10+2-1} = C_2^{11} = \frac{11!}{(10-2)!\,2!} = \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

11. On applique le principe du dénombrement aux deux expériences ce qui donne $52 \cdot 51 = 2652$. Ensuite, il s'agit de diviser ce résultat par deux car l'ordre dans lequel apparaissent les cartes ne nous intéresse pas, on obtient alors 1326.

On peut également appliquer la formule des combinaisons, il s'agit en fait de trouver de combien de manières différentes on peut choisir une paire de cartes dans un jeu de 52 cartes.

$$C_2^{52} = \binom{52}{2} = \frac{52!}{(52-2)!\,2!} = \frac{52!}{50!\,2!} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1} = 1\,326$$

12. a) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 19\,275\,223\,968\,000$.
On peut également le voir comme étant le nombre possible d'arrangements que l'on peut faire avec un échantillon de 10 éléments parmi 26, autrement dit :

$$A_10^26 = \frac{26!}{(26-10)!} = \frac{26!}{16!} = 19\,275\,223\,968\,000$$

b) A chaque position ( 1 à 10) on peut mettre 26 lettres différentes, donc il s'agit d'un arrangement avec répétition : $26^{10}$.

13. a) Il s'agit d'une combinaison simple, l'ordre n'est pas important.

$$C_7^{12} = \binom{12}{7} = \frac{12!}{(12-7)!\,7!} = \frac{12!}{5!\,7!} = 792 \text{ façons}$$

b) 8 roses + 4 gerberas

i) $C_4^8 \cdot C_3^4 = \dfrac{8!}{(8-4)!\,4!} \cdot \dfrac{4!}{(4-3)!\,3!} = \dfrac{8!}{4!\,4!} \cdot \dfrac{4!}{1!\,3!} = 70 \cdot 4 = 280$ façons

ii) On calcule le cas où il y a 7 roses : $C_7^8 = \dfrac{8!}{(8-7)!\,7!} = \dfrac{8!}{1!\,7!} = 8$ façons

Donc au moins 1 gerbera : $792 - 8 = 784$ façons