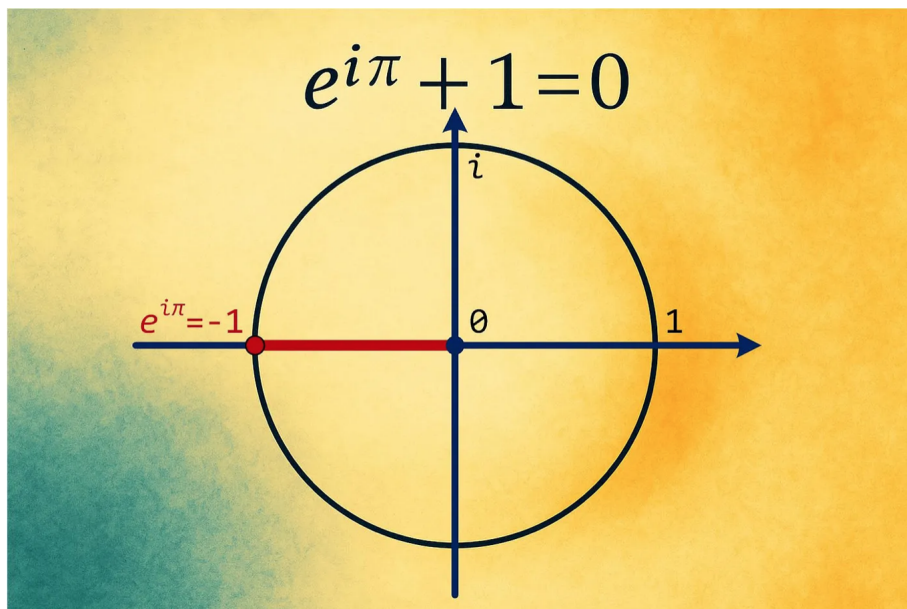


Nombres complexes

*Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile
et le plus court passe souvent par le domaine complexe.*

(Jacques Hadamard)

2 M renforcé



Artistic representation of Euler's identity illustrated on the unit circle.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Une démarche naturelle et historique	5
1.2	Bref historique	5
2	Forme algébrique d'un nombre complexe	7
2.1	Définitions	7
2.2	Forme algébrique d'un nombre complexe	7
2.2.1	Définition	7
2.2.2	Nombre imaginaire pur	8
2.3	Conséquence de l'unicité de la forme algébrique	8
2.4	Représentation graphique	9
2.5	Opérations sur les nombres complexes	10
2.6	Nombre complexe conjugué	13
2.6.1	Définition	13
2.6.2	Propriétés du conjugué d'un nombre complexe	13
2.6.3	Calcul du quotient de deux nombres complexes	14
3	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	17

3.1	Définition	17
3.2	Théorème sur les produits et les quotients de nombres complexes	19
4	Forme exponentielle d'un nombre complexe	21
4.1	Définition	21
4.2	Formules d'Euler	22
4.3	Propriétés de la forme exponentielle	22
4.4	Formule de Moivre	23
4.5	Théorème sur les racines énièmes d'un nombre complexe	23
4.6	Résolution d'équations	24
4.6.1	Le théorème fondamental de l'algèbre	24
4.6.2	Résolution d'équations du premier degré	24
4.6.3	Résolution d'équations du deuxième degré	24
4.6.4	Exemples	24

Chapitre 1

Introduction

1.1 Une démarche naturelle et historique

L'équation $x + 5 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a une dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$: $x = -2$. De même, l'équation $5x = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une : $x = \frac{2}{5}$.

Et l'équation $x^2 = 5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver : $x = \pm\sqrt{5}$.

Ainsi, quand une équation n'a pas de solution dans un ensemble, la démarche naturelle et historique consiste à passer dans un ensemble plus grand.

À ce stade, l'ensemble numérique le plus grand abordé, à ce stade, est $\mathbb{R}$. Cependant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Dans ce cours, nous allons donc résoudre cette équation en utilisant un nouveau nombre "imaginaire" i et passer ainsi à un nouvel ensemble de nombres : l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{C}$, cette équation a deux solutions : $x = i$ et $x = -i$.

1.2 Bref historique

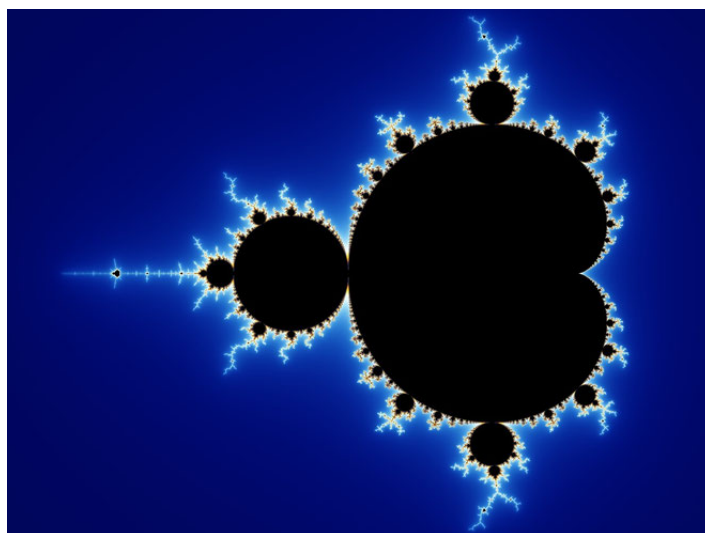
L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVI^e siècle avec une première apparition dans les travaux de Girolamo Cardan (1501 - 1576) et Rafael Bombelli (1526 - 1572). En essayant de résoudre les équations de la forme $x^3 + px = q$, les deux mathématiciens italiens ont eu l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif : lors de la recherche de solutions pour l'équation $x^3 - 15x = 4$, ils sont amenés à utiliser un nombre dont le carré est égal à -121 pour finalement trouver que 4 est une solution de cette équation.

Cette audacieuse et brillante idée a permis d'obtenir des résultats et a conduit à l'introduction de nombres *imaginaires* car de carré négatif.

Au milieu du XVIII^{ème} siècle, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) propose que la notation : $\sqrt{-1}$ soit remplacée par la lettre i donc $i^2 = -1$. Ainsi, i est la solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Plus tard, Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) montre que ces nouveaux nombres sont de la forme $a + ib$ où a et b sont des réels. Ils sont appelés **nombres complexes** par Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Les réels apparaissent alors comme des nombres complexes particuliers car combinant une partie réelle et une partie imaginaire.

En mathématiques, les nombres complexes sont utilisés dans le traitement du signal dans les séries de Fourier, dans le calcul intégral avec les intégrales par résidus, dans les fractales pour définir l'ensemble de Mandelbrot.



En physique, les nombres complexes sont utilisés pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques et les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme.

La mécanique quantique nécessite l'utilisation des nombres complexes pour une meilleure compréhension de la théorie quantique et selon certaines théories, la dimension *imaginaire* pourrait même correspondre à une réalité physique et ne pas être seulement une commodité d'écriture.

En économie, les nombres complexes permettent d'étudier des phénomènes d'oscillations rencontrés dans des problèmes de cycles et de stabilité des équilibres.

Chapitre 2

Forme algébrique d'un nombre complexe

2.1 Définitions

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$ (notation des physiciens : $a + bj$, en électricité i représente l'intensité du courant), où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$.

Un nombre complexe est souvent représenté par la lettre z .

Exemples

$-6 + 5i$; $\frac{5}{2}$ et $i\sqrt{2}$ sont des nombres complexes.

2.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

2.2.1 Définition

L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + bi$ où a et b sont des réels quelconques.

- a est appelé **partie réelle de z** , notée $\text{Re}(z)$
- b est appelé **partie imaginaire de z** , notée $\text{Im}(z)$
- La forme $z = a + bi$ est appelée **forme algébrique de z** .

Exemple

Le nombre complexe $z = 3 - 3i$ a pour partie réelle $\operatorname{Re}(z) = 3$ et pour partie imaginaire $\operatorname{Im}(z) = -3$.

Attention

- La partie imaginaire d'un nombre complexe est donc un nombre bien réel !
- On écrit toujours la partie réelle d'un nombre complexe en premier, et ce afin d'éviter des erreurs. On écrit $-3 + 5i$ et non $5i - 3$.

2.2.2 Nombre imaginaire pur

Un nombre complexe z est dit **imaginaire pur** ou totalement imaginaire si sa partie réelle est nulle ; dans ce cas, il s'écrit sous la forme $z = bi$.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit réel. Le nombre réel 0 est le seul qui soit à la fois réel et imaginaire pur. Bien entendu, la plupart des nombres complexes ne sont ni réels ni imaginaires purs.

2.3 Conséquence de l'unicité de la forme algébrique

Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

Alors

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Démonstration

Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

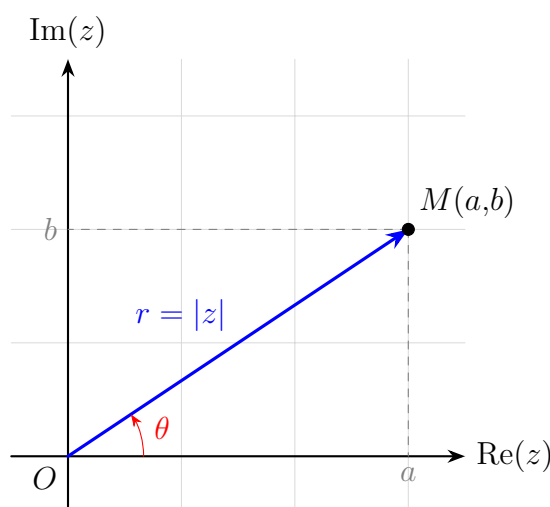
Cas particulier

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

2.4 Représentation graphique

La représentation graphique d'un nombre complexe est extrêmement simple : elle consiste à considérer que les parties réelle et imaginaire (a, b) sont les coordonnées d'un point M appartenant à un plan (que l'on nomme le plan complexe), dans lequel l'axe des abscisses, appelé axe réel, porte la partie réelle a , et dans lequel l'axe des ordonnées, appelé axe imaginaire, porte la partie imaginaire b .

Le nombre complexe $z = a + bi$ est appelé l'affixe du point M .



Dans le plan complexe, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être repéré par la distance $r = OM$ et par l'angle θ (en radian) qu'il forme avec le demi-axe réel positif. r est appelé module du nombre complexe z et θ est appelé son argument. Le module d'un nombre complexe s'écrit $|z|$ et son argument $\arg(z)$.

Le module r du nombre complexe $z = a + bi$ se calcule à l'aide de la relation de Pythagore :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

L'argument θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) d'un nombre complexe peut se calculer à l'aide des relations trigonométriques :

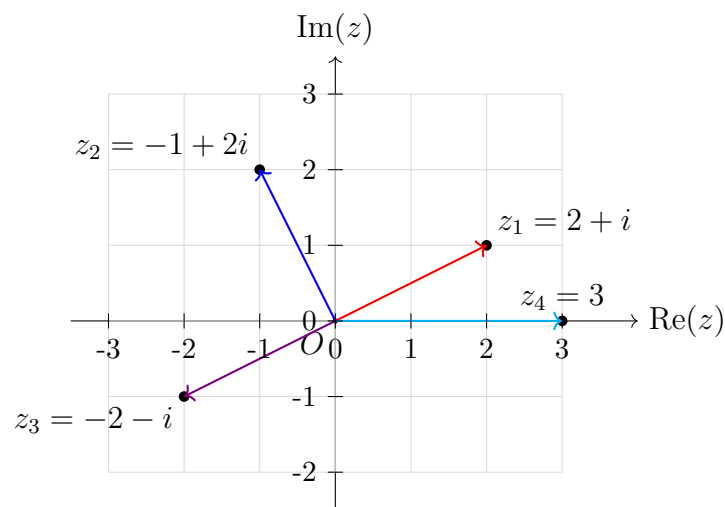
$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{b}{r} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{b}{a} \quad \text{si} \quad a \neq 0.$$

Si $a = 0$, M se trouve sur l'axe imaginaire et on a $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

Remarque

L'équation $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ conduit à considérer le signe de a :

- Si $a > 0$, on a : $\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$;
- Si $a < 0$, on a : $\theta = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exemples

2.5 Opérations sur les nombres complexes

On admet qu'il existe dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui prolongent celles définies dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qui ont les mêmes propriétés.

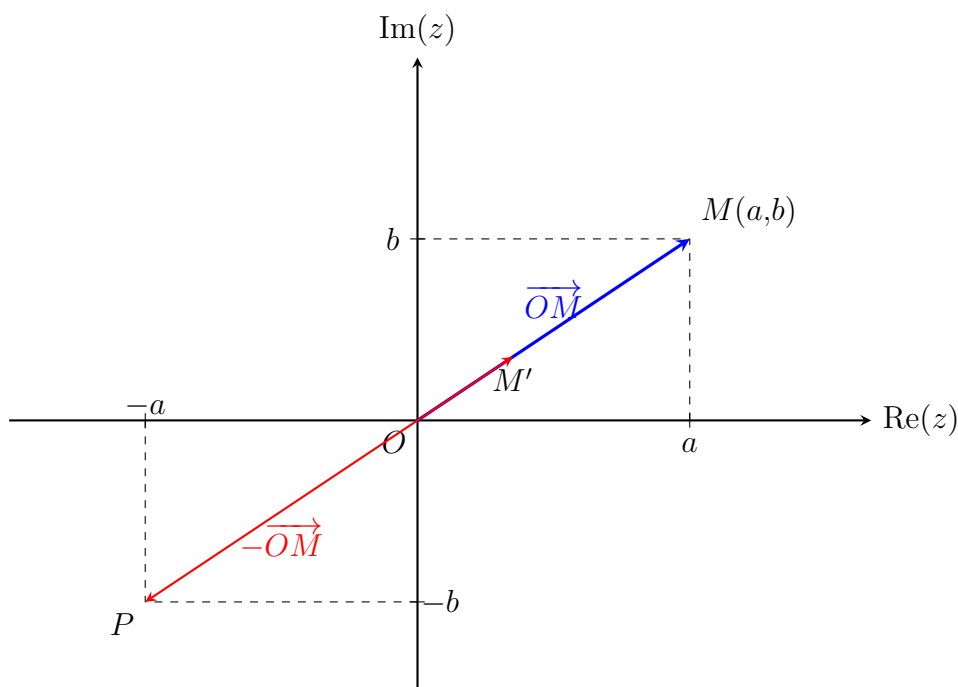
a) Multiplication d'un nombre complexe par un réel

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe et k un réel. On a :

$$kz = k(a + bi) = ka + (kb)i$$

En d'autres termes : $\operatorname{Re}(kz) = k\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(kz) = k\operatorname{Im}(z)$.

Sur la figure ci-dessous, on a positionné un point M' d'affixe kz avec $0 < k < 1$.



Cas particulier

Pour $k = -1$, on obtient l'opposé du nombre complexe z : $-z = -a - bi$.

b) Somme et différence

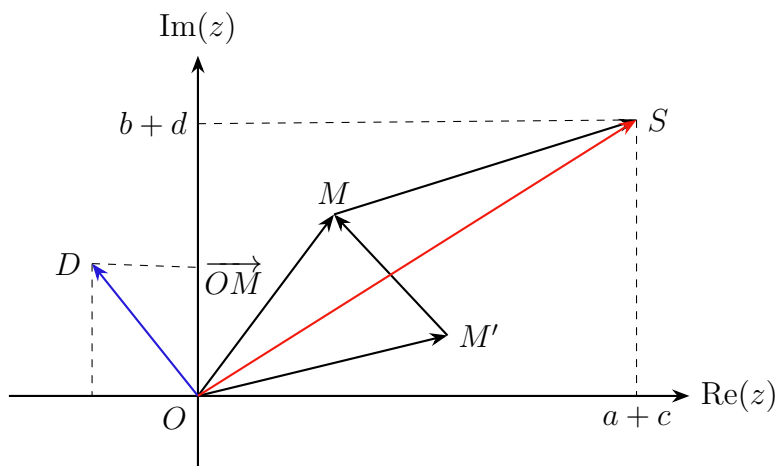
Soient $z = a + bi$ et $z' = c + di$, on note respectivement $z + z'$ et $z - z'$ la somme et la différence des nombres complexes z et z' . On a :

$$z + z' = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - z' = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Représentation graphique

On désigne par M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et z' .



Le point S d'affixe $z + z'$ est défini par :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

Le point D d'affixe $z - z'$ est défini par :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M'M}$$

c) Produit

Soient $z = a + bi$ et $z' = c + di$, on note $z \cdot z'$ le produit des nombres complexes z et z' . On a :

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

2.6 Nombre complexe conjugué

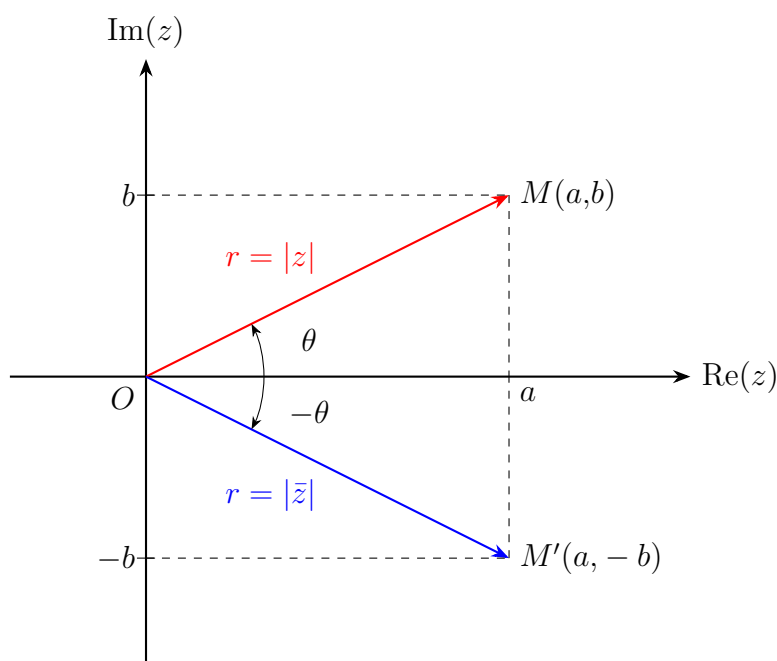
2.6.1 Définition

Le nombre complexe conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$.

Exemples

$$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i \quad , \quad \overline{-5} = -5 \quad \text{et} \quad \overline{-i} = i$$

Dans le plan complexe, l'image du conjugué d'un nombre complexe est son symétrique par rapport à l'axe réel.



On retiendra que l'argument du conjugué d'un nombre complexe non nul est l'opposé de l'argument de ce nombre et que le module du conjugué est égal au module du nombre complexe considéré :

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

2.6.2 Propriétés du conjugué d'un nombre complexe

- (a) Le module d'un nombre complexe est égal à la racine carrée du produit de ce nombre par son conjugué :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

On a également :

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

(b) Le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est égal à ce nombre :

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

(c) Le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués :

$$\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$$

(d) Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués :

$$\overline{(z \cdot z')} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

(e) La somme d'un nombre complexe et de son conjugué est égal au double de sa partie réelle :

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

(f) Un nombre complexe est égal à son conjugué si et seulement s'il est réel :

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

(g) Un nombre complexe est égal à l'opposé de son conjugué si et seulement s'il est imaginaire pur :

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.

2.6.3 Calcul du quotient de deux nombres complexes

Dans le corps des complexes, il est possible de définir et de calculer le quotient de deux nombres. Si ces nombres sont écrits sous leur forme algébrique (parties réelles et parties imaginaires), on effectue le calcul en multipliant le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur, ce qui permet de rendre réel le nouveau dénominateur.

Soit :

$$z = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$z = \frac{ac - bdi^2 + bci - adi}{c^2 - (di)^2}$$

$$\begin{array}{l} i^2 = -1 \\ z = \end{array} \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Remarque

Comme tout réel non nul, tout nombre complexe non nul admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ tel que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Propriétés

- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

Exemple

Déterminer le module et un argument du nombre complexe suivant.

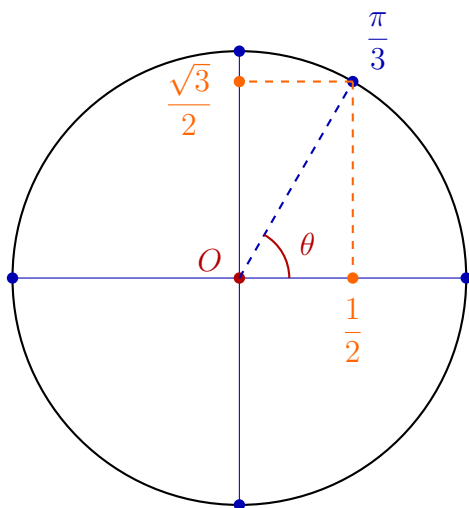
$$z = \sqrt{3} + 3i$$

Le module : $|z| = r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$

On sait que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

À l'aide d'un cercle trigonométrique, on détermine la valeur de θ appartenant à $] -\pi; \pi[$ qui correspond aux valeurs précédentes de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.



À l'aide du cercle trigonométrique, on en conclut que :

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Chapitre 3

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

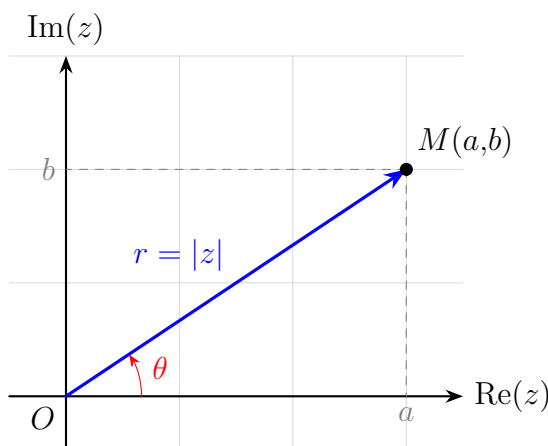
3.1 Définition

Soit $z = a + bi$ et M son image dans le plan complexe.

- Le module de z est le réel positif $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Géométriquement, $|z| = ||\overrightarrow{OM}||$.
- Un argument de z ($z \neq 0$) est le nombre θ défini à $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) près par

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Géométriquement, θ est, à $2k\pi$ près, la mesure de l'angle formé par l'axe réel et $\overrightarrow{OM}$.



On appellera forme trigonométrique du nombre complexe z l'expression suivante :

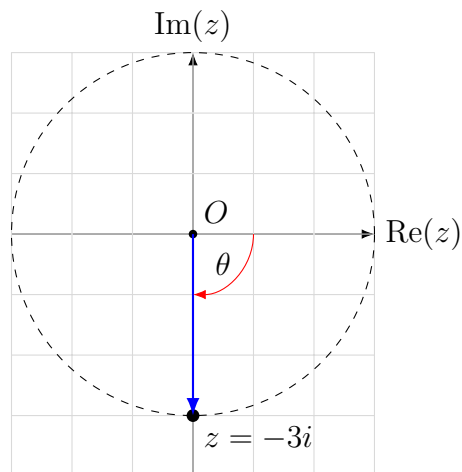
$$z = a + bi = (r \cos(\theta)) + (r \sin(\theta))i = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

ou sous une forme abrégée : $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$.

Exemples

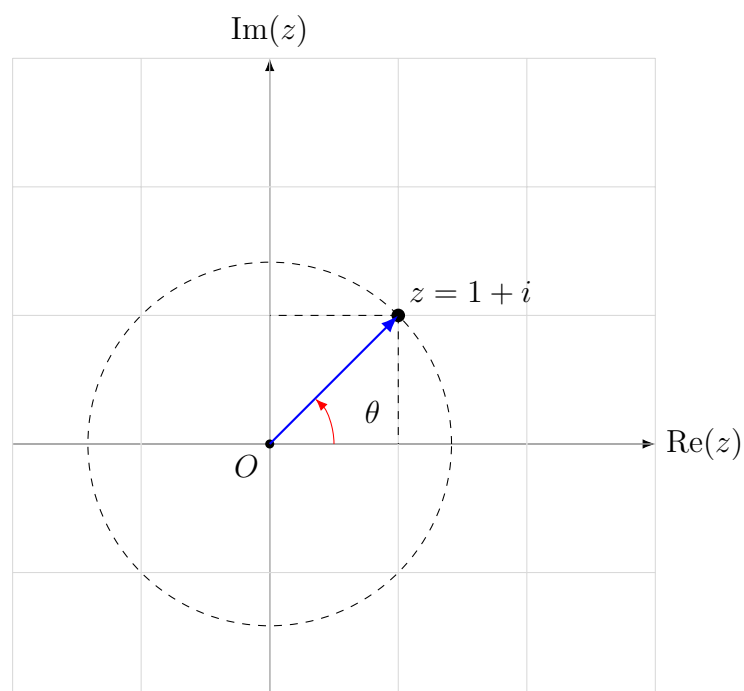
- Soit $z = -3i$, alors $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
 $\Rightarrow z = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) i$

Schéma dans le plan complexe :



- Soit $z = 1 + i$, alors $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
 $\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

Schéma dans le plan complexe :



3.2 Théorème sur les produits et les quotients de nombres complexes

Formules

Si des nombres complexes sont exprimés sous forme trigonométrique, on peut les multiplier ou les diviser comme le montre le théorème suivant. Mais rappelons d'abord 4 formules trigonométriques :

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Théorème

Si les formes trigonométriques de deux nombres complexes z_1 et z_2 sont :

$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \quad \text{et} \quad r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$$

alors :

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\text{b) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Démonstration

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2 = r_1 [\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)] \cdot r_2 [\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 [(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))]$$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$\Rightarrow$ Le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leur module et son argument est la somme de leurs arguments.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))} = \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) - i \sin(\theta_2))}{r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))(\cos(\theta_2) - i \sin(\theta_2))} \\ &= \frac{r_1 \cos(\theta_1)(\cos(\theta_2) - i \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + i \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - i^2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))}{r_2 \cos^2(\theta_2) - i^2 \sin^2(\theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - i^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - i \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)}{r_2 \cos^2(\theta_2) - i^2 \sin^2(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1))}{r_2 \cos^2(\theta_2) - i^2 \sin^2(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r_2 \cos^2(\theta_2) - i^2 \sin^2(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r_2 \cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Le module du quotient de deux nombres complexes est la division de leur module et son argument est la différence de leurs arguments.

Chapitre 4

Forme exponentielle d'un nombre complexe

4.1 Définition

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$, où r est le module de z et θ un argument de z . Cette forme de z est dite exponentielle.

Par conséquent :

$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

Cette forme exponentielle est également appelée forme polaire ou encore forme module-argument.

On peut avec cette notion, réécrire de nombreuses propriétés des nombres complexes. Elle est en effet compatible avec les propriétés de l'exponentielle.

Remarque

Pour un nombre complexe imaginaire pur non nul de la forme ib , le module est égal à la valeur absolue de b et son argument est égal à $\frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ ou $\frac{-\pi}{2}$ si $b < 0$.

Exemples

- $3e^{i\pi} = 3(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$
- $5e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 5 \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 10e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}} = 10e^{\frac{i3\pi + i4\pi}{12}} = 10e^{i\frac{7\pi}{12}}$

4.2 Formules d'Euler

On doit au mathématicien suisse Euler l'égalité qui porte son nom et qui permet d'écrire un nombre complexe sous la forme d'une exponentielle :

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

Dans le cas où $r = 1$ et $\theta = \pi$, la formule d'Euler donne le magnifique résultat

$$e^{i\pi} = -1$$

qui met en relation les trois plus importantes constantes des mathématiques : le nombre d'Euler, l'unité imaginaire et π .

À partir de $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$, on tire les formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

On retiendra ces deux expressions permettant d'exprimer les deux fonctions trigonométriques de base en fonctions d'exponentielles complexes. Ces formules s'avèrent très utiles, notamment pour simplifier ou encore linéariser des expressions trigonométriques plus ou moins compliquées.

4.3 Propriétés de la forme exponentielle

- Soit z un nombre complexe non nul et $re^{i\theta}$ une forme exponentielle de z . Alors $re^{-i\theta}$ est une forme exponentielle de $\bar{z}$.
- Soient z et z' deux nombres complexes non nuls de formes exponentielles $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ respectivement. On a alors :

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

et

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

4.4 Formule de Moivre

Le mathématicien français Abraham de Moivre (1667 - 1754) a trouvé la formule trigonométrique suivante :

$$\begin{aligned} z^n &= [r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad \text{pour tout } n \geq 1 \\ &\iff (r \operatorname{cis}(\theta))^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{aligned}$$

Ce qui donne naturellement pour la notation exponentielle

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Exemple

Calculer $(1 + i)^{20}$.

Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (1 + i)^{20} &= \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^{20} \\ &= (\sqrt{2})^{20} \operatorname{cis} \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{10} \operatorname{cis}(5\pi) = 1024 \operatorname{cis}(\pi) = -1024 \end{aligned}$$

4.5 Théorème sur les racines énièmes d'un nombre complexe

Théorème

Si $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est un nombre complexe non nul quelconque et si n est un entier positif quelconque, alors z a exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ différentes $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ qui sont donnés par la formule suivantes :

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right] \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Remarques

- Les racines $n^{\text{èmes}}$ de z dans ce théorème ont toutes le même module de $\sqrt[n]{r}$, donc leurs représentations géométriques sont sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ centré en O . De plus, elles sont équidistantes sur le cercle, puisque la différence des arguments des racines $n^{\text{èmes}}$ successives est de $\frac{2\pi}{n}$.
- Le cas spécial où $z = 1$ est particulièrement intéressant. Les n racines distinctes sont appelées les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Dans le cas où $n = 3$, on appelle ces racines les racines cubiques de l'unité.

4.6 Résolution d'équations

4.6.1 Le théorème fondamental de l'algèbre

L'intérêt principal de l'ensemble des nombres complexes réside dans le théorème suivant.

Théorème

Tout polynôme $p(z)$ de degré $n \geq 1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$.

4.6.2 Résolution d'équations du premier degré

Il y a aucune différence par rapport aux résolutions d'équation du premier degré dans les nombres réels.

4.6.3 Résolution d'équations du deuxième degré

Lorsque son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, l'équation du deuxième degré à coefficients réels $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i$$

et

$$z_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i$$

Ces deux solutions complexes sont les conjuguées l'une de l'autre.

4.6.4 Exemples

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(3 + i)z + 4 = 2z$$

C'est une équation simple dans laquelle z est une inconnue appartenant à $\mathbb{C}$. Pour déterminer z , on utilise les mêmes techniques que pour une résolution dans $\mathbb{R}$. On développe :

$$3z + iz + 4 = 2z \Rightarrow z(3 + i - 2) = -4$$

Soit :

$$z = \frac{-4}{1 + i}$$

Pour faire apparaître la forme algébrique $z = a + bi$, la méthode consiste à multiplier le dénominateur et le numérateur de ce quotient par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire par $1 - i$:

$$z = \frac{-4(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-4+4i}{1-i^2} = -2+2i$$

Donc

$$S = \{-2+2i\}$$

b) Équation à une variable nécessitant une décomposition algébrique.

Dans certains cas, il est nécessaire de poser $z = a + bi$ et de rechercher le couple de réels (a, b) comme résultat d'un système de deux équations dans $\mathbb{R}$. Ce peut être le cas si une équation fait intervenir une variable complexe z et son conjugué $\bar{z}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(2+i)\bar{z} = 2(z+i) + 1$$

On pose $z = a + bi$ et $\bar{z} = a - bi$.

L'équation devient :

$$(2+i)(a-bi) = 2(a+bi+i) + 1$$

On développe et exprime chaque membre sous les formes partie réelle et partie imaginaire :

$$2a - 2bi + ia - bi^2 = 2a + 2bi + 2i + 1 \Rightarrow (2a + b) + (a - 2b)i = (2a + 1) + (2b + 2)i$$

Pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut que leurs parties réelles d'une part et leurs parties imaginaires d'autre part soient égales. On obtient alors un système de deux équations :

$$\begin{cases} 2a + b = 2a + 1 \\ a - 2b = 2b + 2 \end{cases}$$

La première équation donne $b = 1$ que l'on remplace dans la seconde pour obtenir :

$$a - 2 = 2 + 2 \Rightarrow a = 6$$

Par conséquent, la solution de l'équation est :

$$z = 6 + i \Rightarrow S = \{6 + i\}$$

Remarque

Dans le cas présent, résoudre une équation dans $\mathbb{C}$ revient à résoudre un système de deux équations dans $\mathbb{R}$.

c) Racines carrées d'un nombre complexe.

Déterminer les racines carrées de $-5 - 12i$.

Cela revient à déterminer $z = a + bi$ tel que $z^2 = -5 - 12i$.

On a :

$$(a + bi)^2 = -5 - 12i \Rightarrow a^2 + 2bi + b^2i^2 = -5 - 12i \Rightarrow a^2 - b^2 + 2bi = -5 - 12i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ ab = -6 \\ b = \pm 3 \end{cases}$$

On a deux solutions : $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -2 + 3i$.

D'où

$$S = \{-2 + 3i ; 2 - 3i\}$$

d) Résoudre l'équation suivante : $z^3 = -1 + i$ et donner les solutions sous forme exponentielle.

L'astuce est d'écrire l'équation sous forme exponentielle afin de pouvoir utiliser la propriété

$$r_1 \operatorname{cis}(\theta_1) = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2) \iff r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2$$

- On écrit les membres de gauche et droite sous forme exponentielle :

On pose $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $r_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, on a :

$$z_1^3 = (r_1 e^{i\theta_1})^3 = r_1^3 e^{3i\theta_1}$$

Et $z_2 = -1 + i$

$$|z_2| = r_2 = \sqrt{2} \text{ et } \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \text{ donc } z_2 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

On doit alors résoudre l'équation

$$r_1^3 e^{3i\theta_1} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

- L'égalité des modules donne

$$r_1^3 = \sqrt{2} \text{ donc } r_1 = \sqrt[6]{2}$$

- L'égalité des arguments donne

$$3\theta_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ donc } \theta_1 = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Les solutions sont donc $z_k = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$. L'équation possède exactement 3 solutions distinctes : z_0, z_1, z_2

$$\Rightarrow S = \left\{ \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{4}} ; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} ; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\}$$