

Corrigé

2.1.2
3.3.2

Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

- a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.
- b) Le centre est $C(2; -3)$ et le rayon est égal à 7.
- c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6; -8)$.
- d) Le cercle passe par $A(2; 6)$ et son centre est $C(-1; 2)$.
- e) Les points $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$ sont les extrémités d'un diamètre.
 - f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d : 3x - 4y + 20 = 0$.
 - g) Le centre est $C(1; -1)$ et le cercle est tangent à $d : 5x + 9 = 12y$.
 - h) Le cercle passe par $A(3; 1)$ et par $B(-1; 3)$ et son centre est sur $d : 3x = y + 2$.
 - i) Le cercle passe par $A(1; 1)$, par $B(1; -1)$ et par $C(2; 0)$.

Rappel :

Equation d'un cercle : $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ où centre $C(c_1; c_2)$, rayon r

a) $C(0; 0)$, $r = 3$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$

c) $C(6; -8) \Rightarrow$ cercle : $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = r^2$

cercle passe par 0 $\Rightarrow (0 - 6)^2 + (0 + 8)^2 = r^2 \Rightarrow 36 + 64 = r^2$

$$\Rightarrow r = 10$$

$$\Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

ou : $\|\vec{OC}\| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10 = r$

d) $C(-1; 2) \Rightarrow (\gamma) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$

(γ) passe par $A(2; 6) \Rightarrow (2 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$e) \quad A(3;2), \quad B(-1;6) \Rightarrow C \text{ milieu de } AB = \text{centre du cercle}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{3-1}{2}; \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow C(1;4)$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

$$A \in (\gamma) \Rightarrow (3-1)^2 + (2-4)^2 = r^2 \Rightarrow 4+4 = r^2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$$

$$f) \quad \text{centre} = \text{origine} \Rightarrow O(0;0) \quad (d) : 3x - 4y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow \delta(O; d) = \frac{|0-0+20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4 = r$$

$$\Rightarrow (\gamma) : x^2 + y^2 = 16$$

$$g) \quad C(1;-1) \Rightarrow \delta(C; d) = r = \frac{|5+12+9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$h) \quad C(x_c; y_c) \text{ est sur la droite } (d) : 3x = y+2 \Rightarrow y = 3x-2$$

$$\Rightarrow y_c = 3x_c - 2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-x_c)^2 + (y-3x_c+2)^2 = r^2$$

$$A \in (\gamma) \Rightarrow (3-x_c)^2 + (3-3x_c)^2 = r^2 \Rightarrow 9-6x_c+x_c^2+9-18x_c+9x_c^2 = r^2$$

$$B \in (\gamma) \Rightarrow (-1-x_c)^2 + (5-3x_c)^2 = r^2 \Rightarrow 1+2x_c+x_c^2+25-30x_c+9x_c^2 = r^2$$

$$\text{Système : } \begin{cases} 9-6x_c+x_c^2+9-18x_c+9x_c^2 = r^2 \\ 1+2x_c+x_c^2+25-30x_c+9x_c^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_c^2 - 24x_c + 18 = r^2 \quad | \cdot (-1) \\ 10x_c^2 - 28x_c + 26 = r^2 \end{cases}$$

$$\underline{-4x_c + 8 = 0 \Rightarrow x_c = 2}$$

$$\Rightarrow r^2 = 40 - 48 + 18 = 10 \Rightarrow y_c = 6-2 = 4 \Rightarrow (\gamma) : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$$

$$i) \quad M \text{ milieu de } AB : M \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1-1}{2} \right) = M(1; 0)$$

$$N \text{ milieu de } AC : N \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1-0}{2} \right) = N \left(\frac{2}{2} ; \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (m_{AB}) : y + C_1 &= 0, \quad M \in m_{AB} \Rightarrow 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ &\Rightarrow (m_{AB}) : y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_{AC}) : x - y + C_2 &= 0, \quad N \in m_{AC} \Rightarrow \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow (m_{AC}) : x - y - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$(m_{AB}) \cap (m_{AC}) : y = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow M \left(\frac{1}{2}; 0 \right) \text{ centre du cercle}$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = r^2$$

$$A \in (\gamma) \Rightarrow 0 + 1 = r^2 \Rightarrow r^2 = 1$$

$$\text{donc } \underline{(\gamma) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1}$$