

Corrigé

2.1 Le cercle

2.1.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

g) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 64$

h) $x^2 + y^2 + x = 0$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$

i) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

d) $x^2 + (y-5)^2 = 5$

j) $x^2 + y^2 + y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

k) $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

l) $144x^2 + 144y^2 - 216x + 192y = -145$

Rappel :

Équation cartésienne du cercle ($\mathcal{C}$) :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{où } C(x_0; y_0) \text{ centre}$$

$r = \text{rayon}$

a) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

$\Rightarrow C(5; -2), r = 5$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 64$

$\Rightarrow C(-2; 0), r = 8$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$

$\Rightarrow C(5; -2), r = 0 \Rightarrow \text{cercle-point}$

d) $x^2 + (y-5)^2 = 5$

$\Rightarrow C(0; 5), r = \sqrt{5}$

$$e) \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$$

→ Il faut transformer cette équation en équation cartésienne !

$$= x^2 - 2x + ? + y^2 + 4y + ? = 20$$

identité remarquable: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$$

$$= (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

$$= C(1; -2), r = 5$$

$$f) \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$$

$$= x^2 - 2x + ? + y^2 + 4y + ? = -14$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -14 + 1 + 4 = -9 < 0$$

$$= (x-1)^2 + (y+2)^2 = -9 < 0$$

→ ce n'est pas un cercle !

$$g) \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$$

$$= x^2 + 4x + ? + y^2 - 2y + ? = -5$$

$$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -5 + 4 + 1$$

$$= (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

→ $C(-2; 1), r = 0 \rightarrow$ cercle-point !

$$h) x^2 + y^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + ? + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad C\left(-\frac{1}{2}; 0\right), r = \frac{1}{2}$$

$$i) x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + y^2 - 4y = -14$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -14 + 9 + 4$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = -1 < 0$$

Ce n'est pas un cercle

$$j) x^2 + y^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow C\left(0; -\frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{2}$$

$$k) 80x^2 + 60y^2 - 120x + 80y + 17 = 0 \quad | : 80$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + y + \frac{17}{80} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + ? + y^2 + y + ? = -\frac{17}{80}$$

$$= x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{-17}{80} + \frac{9}{16} + \frac{1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-17}{80} + \frac{45}{80} + \frac{20}{80} = \frac{48}{80}$$

$$= \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

$$= C\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad r = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{0.6}$$

$$2) \quad 144x^2 + 144y^2 - 216x + 192y = -145 \quad | : 144$$

$$= x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = \frac{-145}{144}$$

$$= x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{-145}{144} + \frac{9}{16} + \frac{4}{9}$$

$$= \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$= C\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right) \quad , \quad r = 0 \quad \rightarrow \text{circle-point!}$$