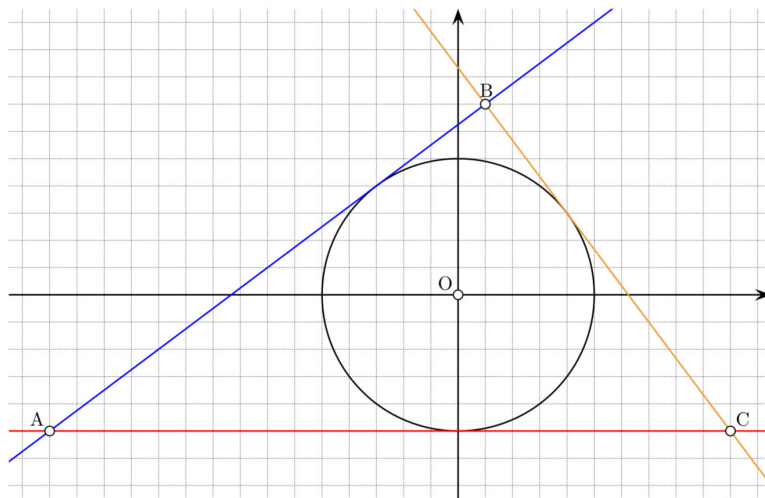


Cercle : problèmes

On donne les sommets $A(-15; -5)$ et $B(1; 7)$ d'un triangle ABC.

- 1) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle, sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine du repère.
- 2) Calculer l'aire du triangle ABC.



1) Calcul de la droite AB

Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - (-15) \\ 7 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, la droite AB est de la forme $3x - 4y + c = 0$.

On sait de plus que le point A appartient à la droite AB :

$$3 \cdot (-15) - 4 \cdot (-5) + c = 0 \text{ implique } c = 25.$$

En résumé, l'équation de la droite AB est $(AB) : 3x - 4y + 25 = 0$.

Équation du cercle inscrit

$$r = \delta(O; AB) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

L'équation du cercle inscrit est par conséquent $x^2 + y^2 = 25$.

Calcul de la droite AC

Les tangentes de pente m au cercle inscrit sont données par la formule :

$$y - 0 = m(x - 0) \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

$$y = mx \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

On recherche les tangentes issues du point $A(-15; -5)$:

$$-5 = m \cdot (-15) \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

$$15m - 5 = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

$$3m - 1 = \pm \sqrt{m^2 + 1}$$

En élevant au carré les termes de cette égalité, on obtient :

$$(3m - 1)^2 = m^2 + 1$$

$$9m^2 - 6m + 1 = m^2 + 1$$

$$8m^2 - 6m = 0$$

$$2m(4m - 3) = 0$$

On obtient ainsi deux solutions : $m_1 = 0$ et $m_2 = \frac{3}{4}$.

Comme la seconde pente $m_2 = \frac{3}{4}$ correspond à la pente de la droite AB, on déduit que la première pente $m_1 = 0$ correspond à la pente de la droite AC.

La droite AC est ainsi de la forme $y = 0x + h$, c'est-à-dire $y = h$.

Puisque la droite AC passe par le point A(-15; -5), on a : $-5 = h$.

On conclut que la droite AC a pour équation $y = -5$, ou si l'on préfère

$$(AC) : y + 5 = 0.$$

Calcul de la droite BC

Les tangentes de pente m au cercle inscrit sont données par la formule :

$$y = mx \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

On recherche les tangentes issues du point B(1; 7) :

$$7 = m \cdot 1 \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

$$7 - m = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$$

En élevant au carré les membres de cette équation, on trouve :

$$(7 - m)^2 = 25(m^2 + 1)$$

$$49 - 14m + m^2 = 25m^2 + 25$$

$$0 = 24m^2 + 14m - 24$$

$$0 = 12m^2 + 7m - 12$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12) = 625 = 25^2$$

On obtient dès lors deux solutions : $m_1 = \frac{-7+25}{2 \cdot 12} = \frac{3}{4}$ et $m_2 = \frac{-7-25}{2 \cdot 12} = -\frac{4}{3}$.

Comme la première pente $m_1 = \frac{3}{4}$ est celle de la droite AB, la seconde pente $m_2 = -\frac{4}{3}$ est celle de la droite BC.

La droite BC est par conséquent de la forme $y = -\frac{4}{3}x + h$.

On sait en outre qu'elle passe par le point B(1; 7) :

$$7 = -\frac{4}{3} \cdot 1 + h \text{ fournit } h = \frac{25}{3}.$$

En définitive, l'équation de la droite BC est $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ ou plus simplement $(BC) : 4x + 3y - 25 = 0$.

Calcul du point C = AC ∩ BC

$$\begin{cases} y + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 25 = 0 \end{cases}$$

La première équation délivre immédiatement $y = -5$ que l'on remplace dans la seconde équation : $4x + 3 \cdot (-5) - 25 = 0$ donne $x = 10$.

On conclut $C(10; -5)$.

2) **Aire du triangle ABC (1^{re} méthode)**

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = |4| \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 4 \sqrt{4^2 + 3^2} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$\delta(C; \overrightarrow{AB}) = \frac{|3 \cdot 10 - 4 \cdot (-5) + 25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{75}{5} = 15$$

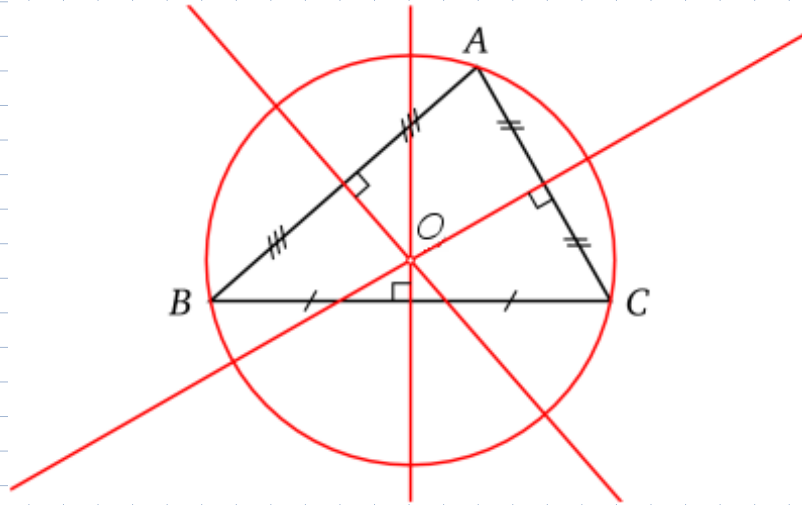
$$\mathcal{A} = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150$$

Aire du triangle ABC (2^e méthode)

La valeur absolue du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

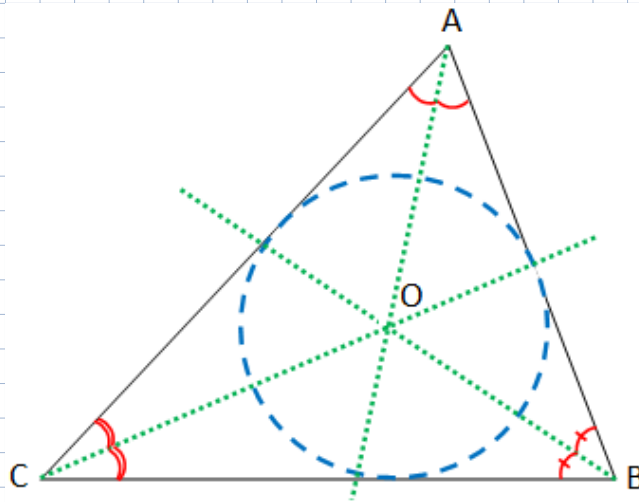
$$\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 16 & 25 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} (16 \cdot 0 - 12 \cdot 25) \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot (-300) \right| = |-150| = 150$$

Cercle circonscrit au Triangle :



- O est le centre du cercle. Les trois médiatrices sont concourantes en un point O.
- Si les trois angles du triangle sont des angles aigus ($< 90^\circ$)
→ O se trouve à l'intérieur du triangle.
- Si un angle du triangle est obtus ($> 90^\circ$), O se trouve à l'extérieur du triangle.
- Si un angle est droit ($= 90^\circ$), O se trouve au milieu du hypoténuse.

Cercle inscrit dans le triangle :



Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point O.

$\Rightarrow$ O est le centre du cercle inscrit dans le triangle.