

Cercle

1) Équation cartésienne du cercle

- On considère un cercle Γ de centre $C(x_0; y_0)$, de rayon r et un point $P(x; y)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $P \in \Gamma$: le point P appartient au cercle Γ

ii) $\|\vec{CP}\| = r \Leftrightarrow \|\vec{CP}\|^2 = r^2$

iii) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Cette dernière expression constitue l'équation cartésienne du cercle Γ de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r .

- En développant l'équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, on obtient
$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

$\Rightarrow$ On constate, dans cette équation du deuxième degré en x et y , que :

i) les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et non nuls ;

ii) il n'y a pas de terme en xy .

Autrement dit, toute équation du deuxième degré en x et y telle que

i) les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et non nuls,

ii) il n'y a pas de terme en xy ,

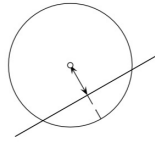
c'est-à-dire toute équation de la forme $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$

avec $a \neq 0$ est soit celle d'un cercle, soit celle de la figure vide.

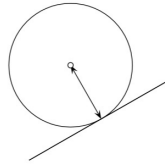
2) Position relative de droites et de cercles

Position relative de droites et de cercles

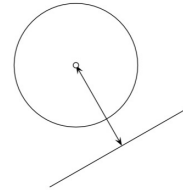
Soient une droite d et un cercle Γ de centre C et de rayon r .



d coupe Γ
 $\delta(C; d) < r$



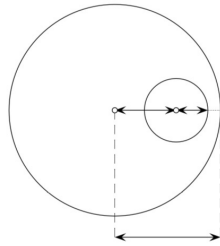
d est tangente à Γ
 $\delta(C; d) = r$



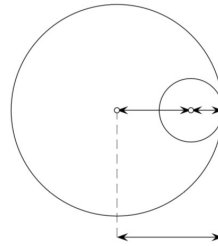
d est extérieure à Γ
 $\delta(C; d) > r$

3) Position relative de deux cercles

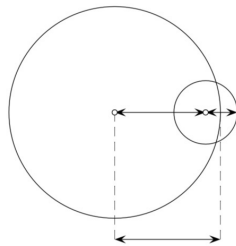
Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs C et C' et de rayons respectifs r et r' (avec $r \leq r'$).



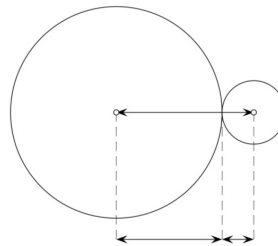
Γ est intérieur à Γ'
 $\delta(C; C') < r' - r$



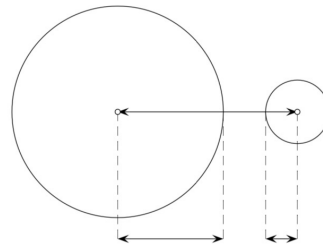
Γ est tangent intérieurement à Γ'
 $\delta(C; C') = r' - r$



Γ coupe Γ'
 $r' - r < \delta(C; C') < r' + r$



Γ et Γ' sont tangents
extérieurement
 $\delta(C; C') = r' + r$



Γ et Γ' sont extérieurs
 $\delta(C; C') > r' + r$

4) Tangente en un point du cercle

On considère un cercle T de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r , un point $T(x_1; y_1)$ situé sur le cercle T , la tangente (t) au centre T au point T et $P(x; y)$ un point du plan

Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $P \in (t)$

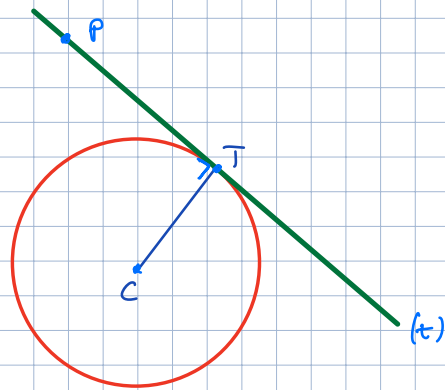
b) $\vec{CT} \perp \vec{TP}$

c) $0 = \vec{CT} \cdot \vec{TP}$

d) $0 = \vec{CT} \cdot (\vec{CP} - \vec{CT})$
 $= \vec{CT} \cdot \vec{CP} - \vec{CT} \cdot \vec{CT}$

e) $\vec{CT} \cdot \vec{CP} = \vec{CT} \cdot \vec{CT} = \|\vec{CT}\|^2 = r^2$

f) $\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0)$
 $= r^2$



En conclusion, l'équation de la tangente en un point $T(x_1; y_1)$ du cercle de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r est donnée par la formule :

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

5) Tangente de pente m

Soit un cercle Γ de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r et une droite (d) d'équation $y = mx + h$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) La droite (d) est Tangente au cercle Γ .

$$b) \quad \delta(C; d) = \frac{|mx_0 - y_0 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

$$c) \quad mx_0 - y_0 + h = \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$d) \quad h = -mx_0 + y_0 \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$e) \quad \text{La droite (d) a pour équation } y = mx - mx_0 + y_0 \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

$$f) \quad \text{La droite (d) a pour équation } y - y_0 = m(x - x_0) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

Par conséquent, les équations des Tangentes de pente m au cercle de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r sont données par la formule :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

! Droite (d) tangente à $\Gamma(C; r)$: $\delta(C; d) = r$

* Utiliser la formule $y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ pour déterminer les tangentes par un point extérieur du cercle :

- On connaît l'équation du cercle $\Rightarrow C(x_0; y_0)$ et r sont connus

- On écrit l'équation des Tangentes de pente m

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad (*)$$

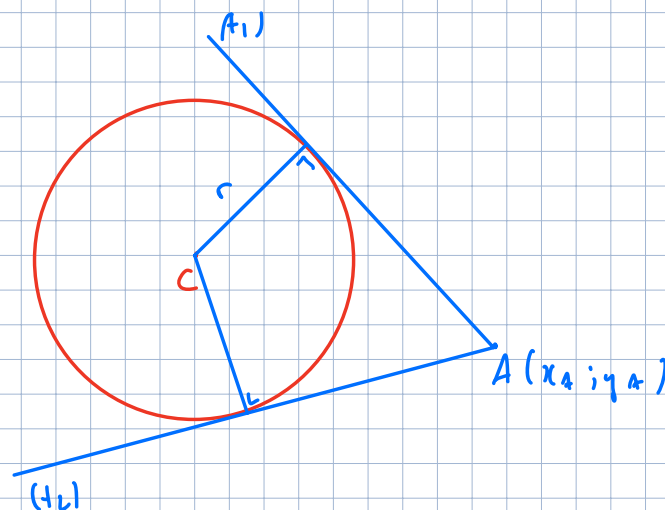
- On remplace x_0 et y_0 et

- ces Tangentes passent par $A(x_a; y_a)$ point extérieur du cercle

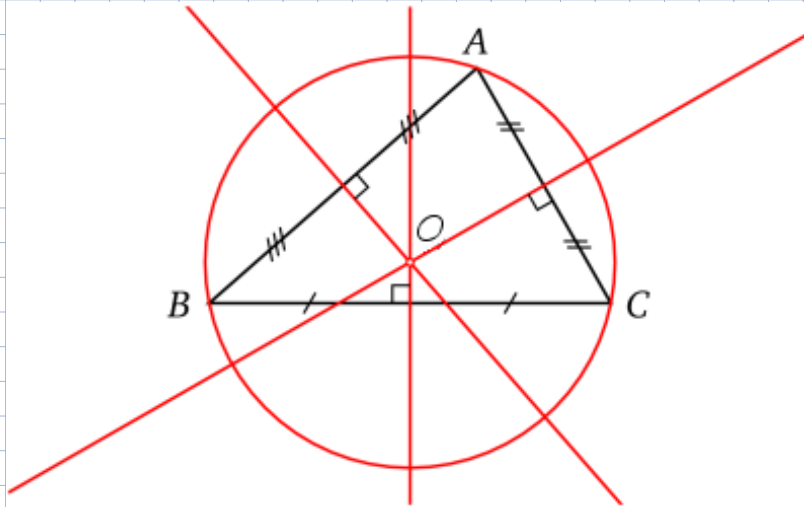
$\Rightarrow$ On remplace les coordonnées de A dans $(*)$, on obtient

une équation en fonction de $m \rightarrow$ résoudre cette équation pour trouver m

- Avec les m trouvés $\rightarrow$ on écrit les équations des tangentes par le point A extérieur du cercle (en utilisant $(*)$)

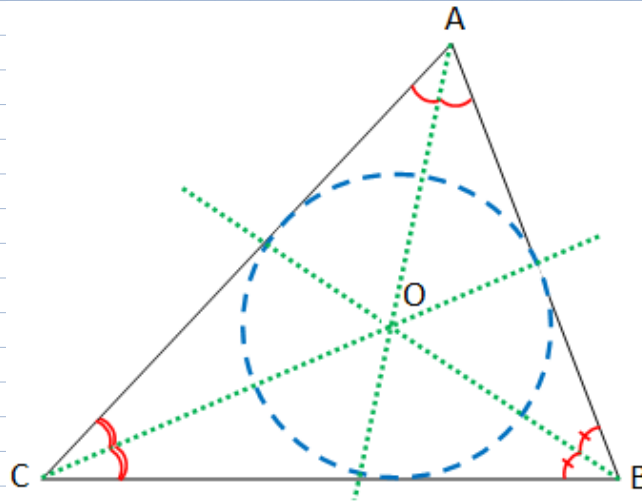


c) Cercle circonscrit au Triangle :



- O est le centre du cercle. Les trois médiatrices sont concourantes en un point O.
- si les trois angles du triangle sont des angles aigus ($< 90^\circ$)
→ O se trouve à l'intérieur du triangle.
- si un angle du triangle est obtus ($> 90^\circ$), O se trouve à l'extérieur du triangle.
- si un angle est droit ($= 90^\circ$), O se trouve au milieu du hypoténuse.

2) Cercle inscrit dans le triangle :



Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point O.

⇒ O est le centre du cercle inscrit dans le triangle.