Corrigé

3.4 La droite dans l'espace

3.4.1 On donne les droites $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = y+4 = \dfrac{z}{5}$ et

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Les points $A(3;-3;5)$ et $B\,(-1/2;3/2;2)$ appartiennent-ils à ces droites ?

* Remplacer les coordonnées de A dans (d_1) :

$\dfrac{3-1}{2} = -3+4 = \dfrac{5}{5}$ → OK → $A \in (d_1)$

* Remplacer les coordonnées de A dans (d_2) :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -k \\ -3 = 1+k \\ 5 = 4k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -4 \\ k = \frac{5}{4} \end{cases}$$

⇒ pas possible → $A \notin (d_2)$

* $B \in (d_1)$? ⇒ $\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{2} \overset{?}{=} \dfrac{\frac{3}{2}}{4} \overset{?}{=} \dfrac{2}{5}$

$-\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{5}$ ⇒ $B \notin (d_1)$

et $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -k = -\frac{1}{2} \\ 1+k = \frac{3}{2} \\ 4k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

⇒ $B \in (d_2)$

3.4.2 On donne la droite d'équation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) situé sur Ox,

b) qui a une ordonnée égale à 5,

c) dont l'abscisse et la cote sont égales,

d) situé sur la droite $\begin{cases} x &= -7 + l \\ y &= -l \\ z &= -1 + 2l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$.

a) point situé sur Ox $\Rightarrow$ $y = z = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 5k \\ 0 = -1 + k \\ 0 = 3 - 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 5 \cdot 1 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x = -3 \Rightarrow$ **A (-3 ; 0 ; 0)**

b) ordonnée = 5 $\Rightarrow$ A (x ; 5 ; z)

$\Rightarrow 5 = -1 + k \rightarrow k = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 5k = 2 - 5 \cdot 6 = -28 \\ z = 3 - 3k = 3 - 3 \cdot 6 = -15 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **A (-28 ; 5 ; -15)**

c) abscisse = cote $\Rightarrow x = z$

$\Rightarrow 2 - 5k = 3 - 3k \Rightarrow 3k - 5k = 3 - 2 \Rightarrow -2k = 1$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = z = 3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow y = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ **A $\left(\frac{9}{2} ; -\frac{3}{2} ; \frac{9}{2}\right)$**

d) $A = (d_1) \cap (d_2) \Rightarrow \begin{cases} 2 - 5k = -7 + l \\ -1 + k = -l \end{cases}$

$1 - 4k = -7 \rightarrow k = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 5 \cdot 2 = -8 \\ y = -1 + k = -1 + 2 = 1 \\ z = 3 - 3k = 3 - 3 \cdot 2 = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-8 ; 1 ; -3)$

3.4.3 Déterminer une équation paramétrique de la droite :

a) qui passe par $A(1;2;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) qui passe par $A(2;3;5)$ et $B(1;5;7)$,

c) qui passe par $A(-3;5;2)$ et est parallèle à l'axe Oz,

d) qui passe par $A(8;6;-12)$ et est parallèle au segment BC, avec $B(4;0;-2)$ et $C(5;-2;3)$.

a) équation paramétrique de la droite : un point + $\vec{d}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(d) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

b) (d) passe par A et B $\rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc $(d) : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = 5 + 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

c) $(d) \parallel Oz \rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (d) : \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = 2 + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

d) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-0 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d} = \vec{BC}$

$\Rightarrow (d) : \begin{cases} x = 8 + k \\ y = 6 - 2k \\ z = -12 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3.4.4 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite :

$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8}$$

$(d) : \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}$, avec $k = -1$ par exemple $\rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-4 ; 1 ; -6) \in (d)$

$\Rightarrow (d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$

* On remplace (x, y, z) dans :

$$\begin{cases} 16(-1+3k) - 2(3+2k) - 11(-2+4k) = 0 \\ 14(-1+3k) - (3+2k) - 10(-2+4k) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -16 + 48k - 6 - 4k + 22 - 44k = 0 & \text{ok} \\ 14 + 42k - 3 - 2k + 20 - 40k - 3 = 0 & \text{ok} \end{cases}$$

$\Rightarrow (d) : \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases}$

* $\dfrac{-1+3k+1}{6} = \dfrac{3+2k-3}{4} = \dfrac{-2+4k+2}{8} = \dfrac{k}{2}$ ok

$\Rightarrow (d) : \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+2}{8}$

3.4.5 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou gauches et, selon les cas, leur éventuel point commun :

a) $d_1 : \begin{cases} x &= 1+3k \\ y &= -2-5k \\ z &= 5+k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $d_2 : \begin{cases} x &= -2-6n \\ y &= 3+10n \\ z &= 4-2n \end{cases}$, avec $n \in \mathbb{R}$

b) $d_1 : \begin{cases} x &= 2-5k \\ y &= 3+2k \\ z &= 5-4k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $d_2 : \begin{cases} x &= 2-5n \\ y &= 3-2n \\ z &= 5-4n \end{cases}$, avec $n \in \mathbb{R}$

c) $d_1 : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-5}{-6} = \dfrac{z-3}{3}$ $\qquad$ $d_2 : \begin{cases} x &= 6+4k \\ y &= -1-12k \\ z &= 5-5k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$

d) $d_1 : \begin{cases} x+y=4 \\ 2y+z=5 \end{cases}$ $\qquad$ $d_2 : \begin{cases} x+3y+z=9 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

a) $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -6 & +6 \\ 30 & -30 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{d_1}$ colinéaire à $\vec{d_2}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3+2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB}$ colinéaire à $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2} \Rightarrow$ droites confondues

b) $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -8-8 \\ 20-20 \\ 10+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-3 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow \det(\vec{AB}; \vec{d_1}; \vec{d_2}) = 0 \Rightarrow$ les droites sont concourantes en A

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -1-5 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\vec{AB}; \vec{d_1}; \vec{d_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -6 & -6 & -12 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

$= -66 - 132 + 0 = -198 \Rightarrow$ Les droites sont gauches

d) $\star \quad \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{-1}$ et $\dfrac{z-5}{2} = \dfrac{y}{-1}$

$\Rightarrow (d_1) : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-5}{2}$

$$
\begin{array}{r}
x + 3y + z = 9 \\
x - y - z = 1 \\
\hline
2x + 2y = 10
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad x + y = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-1}
$$

$$
\begin{array}{r}
x + 3y + z = 9 \\
-x + y + z = -1 \\
\hline
4y + 2z = 8
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad 2y + z = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{z-4}{2} = \frac{y}{-1}
$$

$$
\Rightarrow (d_2) : \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}
$$

$$
\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 2-2 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 0-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$\vec{AB}$ n'est pas colinéaire à $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$

$$
\det\left(\vec{AB} ; \vec{d_1} ; \vec{d_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Les droites sont parallèles}
$$

3.5 Le plan dans l'espace

3.5.1 On donne les plans $\alpha : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$ et

$$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{E} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{d_1}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{d_2}}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les points $A(-2;7;8)$ et $B\,(4;3/2;5/2)$ appartiennent-ils à ces plans ?

-> Il suffit de remplacer les coordonnées de A et de B dans (2).

* $2(-2) + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 8 - 5 = -4 + 21 - 24 - 5 = -12 \neq 0$

$\Rightarrow A \notin (2)$

* $2 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 8 + \frac{9}{2} - \frac{15}{2} - 5 = 0$

$\Rightarrow B \in (2)$

* (β) est donné sous forme paramétrique

pour savoir si $A \in (\beta)$ -> il faut vérifier si $\vec{AE}$ et $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont coplanaires ou pas $\Leftrightarrow \det(\vec{AE}\,;\vec{d_1}\,;\vec{d_2}) \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow E(3;1;5) \Rightarrow \vec{AE} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1-7 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 5(3+12) + 6(-6-3) - 3(8-1) = 75 - 54 - 21 = 0$

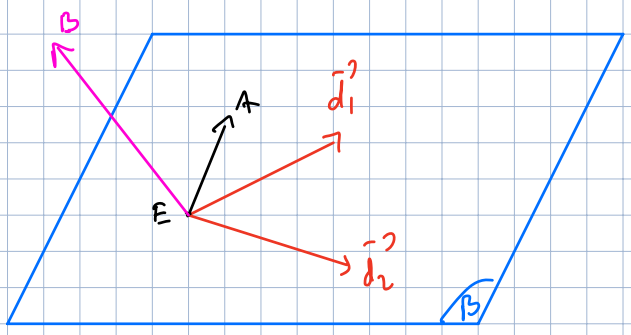
$\Rightarrow \vec{AE}$, $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont coplanaires $\Rightarrow A \in \beta$

* Idem pour B : $\Rightarrow \vec{BE} = \begin{pmatrix} 6-8 \\ 2-3 \\ 10-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(3+12) + (-6-3) + 5(8-1) = -30-9+35$$

$$= -4 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{BE}$, $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas coplanaires $\Rightarrow B \notin \beta$



3.5.2 Déterminer une équation paramétrique du plan α :

a) qui passe par $A(1;-2;3)$ et a pour vecteurs directeurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) qui passe par les points $A(2;5;1)$, $B(-1;7;0)$ et qui est parallèle au vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) qui passe par $A(1;-2;3)$, $B(5;2;1)$ et $C(2;5;2)$,

d) qui passe par $A(5;2;-2)$ et est parallèle au plan Oxy,

a) $(\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 7-5 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

d) $(\alpha) \parallel Oxy \Rightarrow$ 2 vecteurs directeurs : $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3.5.3 Montrer que les équations suivantes définissent toutes le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad 3x + 3z = 39 - 6y$$

↳ $= x + 2y + z - 13 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

On transforme les équations paramétriques en cartésiennes !

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vecteur $\quad \vec{d_1} \quad \vec{d_2}$

3 vecteurs sont coplanaires $\Leftrightarrow$ det $= 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -3 \\ y-5 & -1 & 2 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)(1-2) - (y-5)(-1+3) + (z-1)(2-3)$$

$$\Leftrightarrow -x - 2y - z + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + 2y + z - 13 = 0} \quad \checkmark$$

Le même : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-13 & -1 & -2 \end{vmatrix} = x(0+1) - y(-2+0) + (z-13)(1-0) = x + 2y + z - 13 = 0 \checkmark$$

donc les 2 équations définissent toutes le même plan : $x + 2y + z - 13 = 0$

3.5.4 Calculer les composantes d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :

a) $2x - y - 2z + 5 = 0$
b) $x + 5y - z = 0$
c) $3x - 2y - 7 = 0$
d) $5y - 3z = 0$
e) $x + 2 = 0$
f) $3y + 5 = 0$

$(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

a) $2x - y - 2z + 5 = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $x + 5y - z = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $3x - 2y - 7 = 0 \rightarrow 3x - 2y + 0z - 7 = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $5y - 3z = 0 \rightarrow 0x + 5y - 3z = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $x + 2 = 0 \rightarrow x + 0y + 0z + 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $3y + 5 = 0 \rightarrow 0x + 3y + 0z + 5 = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.5.5 Déterminer l'équation cartésienne du plan α :

a) qui passe par $P(2;1;-1)$ et est normal au vecteur $(1;-2;3)$;

b) qui passe par $P(-6;10;16)$ et est perpendiculaire à la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$;

c) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au segment AB, avec

$$A(1;0;5) \quad \text{et} \quad B(3;-3;8);$$

a) $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$

où $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

ici $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 3z + d = 0$

(α) passe par $P(2;1;-1)$

$\Rightarrow (\alpha) : 2 - 2 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 3$

$\Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 3z + 3 = 0$

b) $(\alpha) \perp (d) \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\alpha) : -2x + y + 2z + d = 0$

$P \in (\alpha) \Rightarrow -2(-6) + 10 + 2 \cdot 16 + d = 0$

$\Rightarrow d = -54$

$\Rightarrow (\alpha) : 2x - y - 2z + 54 = 0$

c) $O \in (\alpha)$ $\rightarrow$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -3-0 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (\alpha) : \quad 2x - 3y + 3z + d = 0$

$O \in (\alpha) \rightarrow \quad d = 0$

$\rightarrow$ $\underline{(\alpha) : \quad 2x - 3y + 3z = 0}$

d) parallèle passe par $P(1; -2; 4)$ et $\parallel$ au plan : $5x + 2y - z + 5 = 0$

$(\alpha) \parallel 5x + 2y - z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (\alpha) : \quad 5x + 2y - z + d = 0$

$P \in (\alpha) \Rightarrow \quad 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 4 + d = 0$

$\Leftrightarrow \quad d = -5 + 4 + 4 = 3$

$\rightarrow$ $\underline{(\alpha) : \quad 5x + 2y - z + 3 = 0}$

3.5.6 Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans de l'exercice 3.5.2.

a) $(\mathcal{P}): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 5 \\ y+2 & -2 & 8 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10(x-1) + 10(y+2) + 10(z-3)$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}): \quad x - y - z = 0$$

b) $(\mathcal{P}): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3 vecteurs $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ det $= 0$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y-5 & 2 & -1 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-2) - 2(y-7) - 1(z-1)$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}): \quad x + 2y + z - 13 = 0$$

c) $(\mathcal{P}): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+2 & 2 & 7 \\ z-3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5(x-1) + (y+2) + 12(z-3) = 5x + y + 12z - 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}): \quad 5x + y + 12z - 39 = 0$$

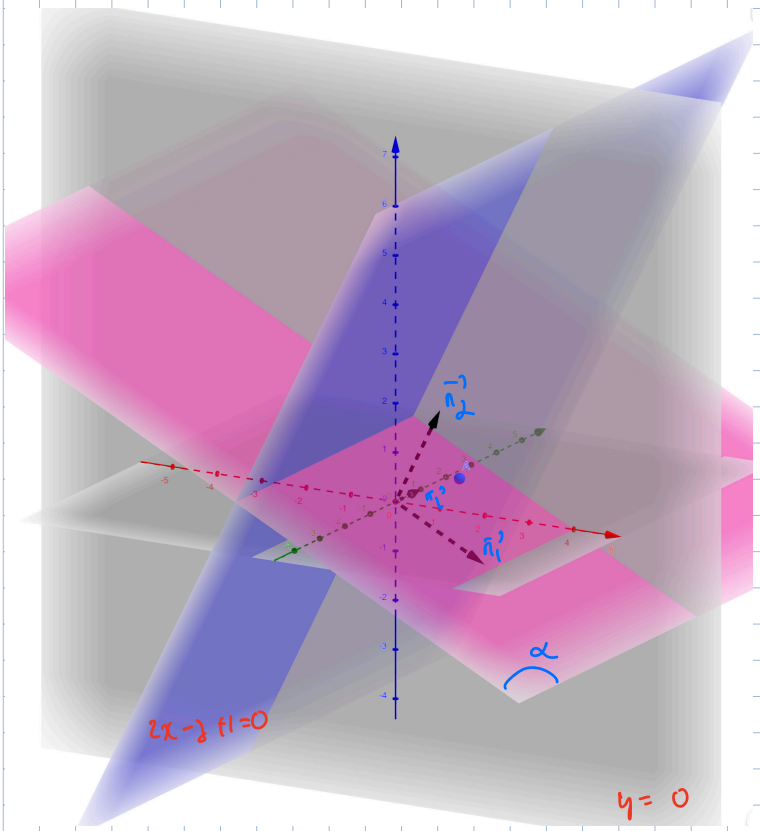
d)

$$(L): \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & 1 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,(z+2) = z+2 = 0$$

$\Rightarrow (L): \quad z+2 = 0$

3.5.7 Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par $A(2;-1;1)$ et qui est perpendiculaire aux plans d'équation $2x - z + 1 = 0$ et $y = 0$.



$(1): 2x - z + 1 = 0$

$\rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(2): y = 0$

$\rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* produit vectoriel entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ donne le vecteur normal du plan cherché (α) :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0+0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

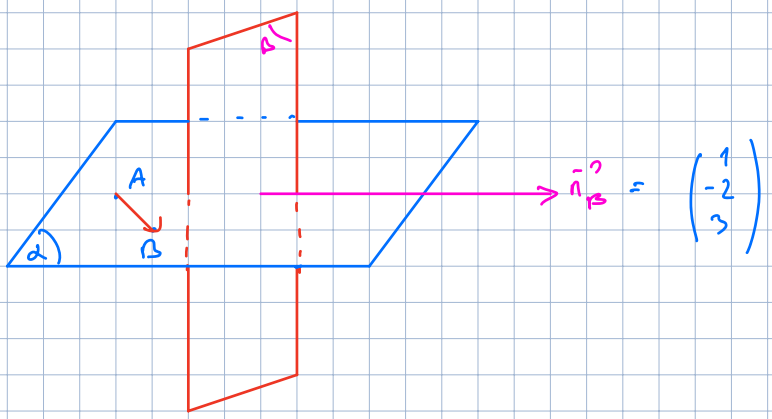
$\Rightarrow (\alpha): \quad x + 0y + 2z + d = 0$

$A \in (\alpha): \rightarrow \quad 2 + 2 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -4$

Donc $\underline{(\alpha): \quad x + 2z - 4 = 0}$

3.5.8 Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par $A(1;-1;2)$, par $B(3;1;1)$ et qui est perpendiculaire au plan $x-2y+3z-5=0$.

(β)



$\vec{n}_\beta$ devient un vecteur directeur de (α)

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1+1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\beta \wedge \vec{AB} = \vec{n}_\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\alpha) : -4x + 7y + 6z + d = 0$

$A \in (\alpha) : -4 \cdot 1 + 7(-1) + 6 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = 4 + 7 - 12 = -1$

$\Rightarrow \underline{(\alpha) : 4x - 7y - 6z + 1 = 0}$

* Autre méthode : $\vec{n}_\beta = \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_1 = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

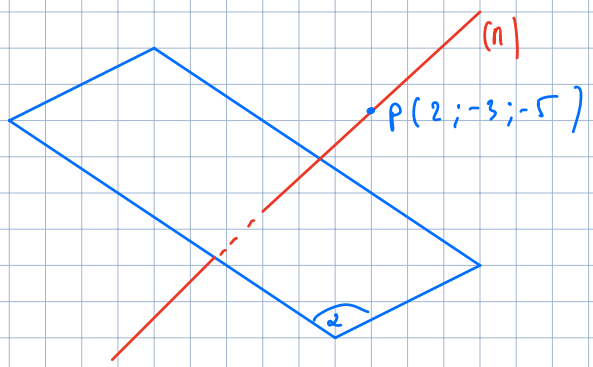
3e vecteur : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$

3 vecteurs coplanaires $\Leftrightarrow 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 2 & -2 \\ z-2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4(x-1) - 7(y+1) - 6(z-2) = 0$

$\Rightarrow \underline{(\alpha) : 4x - 7y - 6z + 1 = 0}$

3.5.9 Déterminer une équation paramétrique de la normale au plan d'équation $6x - 3y + 5z + 2 = 0$ issue du point $P(2; -3; -5)$.

(2)



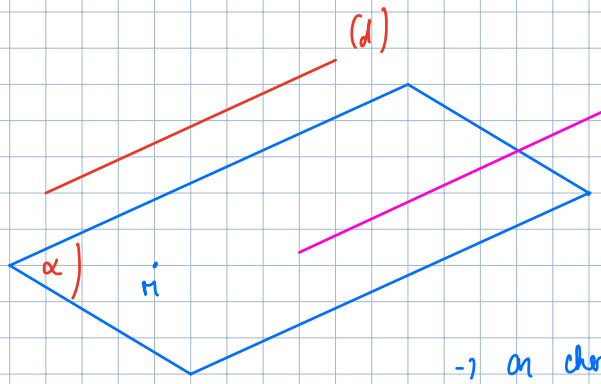
$(2) : 6x - 3y + 5z + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}_2 = \vec{d}_{(n)} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad (n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; k \in \mathbb{R}$

3.5.10 Former l'équation cartésienne du plan qui passe par $M(1;2;-3)$ et qui est parallèle aux droites

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.



$(d) : \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(e) : \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ deviennent 2 vecteurs directeurs du plan (α)

→ on cherche 3e vecteur : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix}$

Ces 3 vecteurs sont coplanaires $\Leftrightarrow$ det $= 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & -3 & -2 \\ z+3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)(9) + (y-2)(11) + (z+3)(5)$$

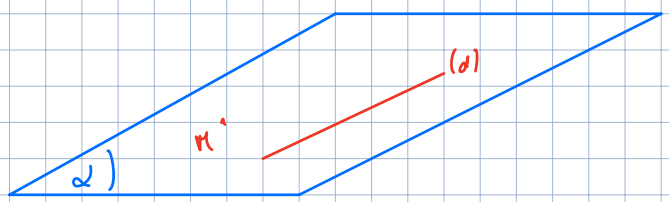
$$= 9x + 11y + 5z - 16 = 0$$

$\Rightarrow$ $(\alpha) : \quad 9x + 11y + 5z - 16 = 0$

3.5.11 Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point $M(2;-2;1)$ et la droite

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -3 + 2k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{A(1;2;-3)} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.



$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A(1;2;-3)$ $\quad \vec{AM} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-2 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

3e vecteur : $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \\ z-1 \end{pmatrix}$

3 vecteurs coplanaires $\Leftrightarrow$ det = 0

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+2 & -4 & -3 \\ z-1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4(x-2) + 6(y+2) + 5(z-1) = 4x + 6y + 5z - 1 = 0$$

$\Rightarrow (\alpha) : \quad 4x + 6y + 5z - 1 = 0$

3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha : 2x + y - z + 15 = 0$

b) $d : x - 1 = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ $\quad \alpha : 2x + 3y + z - 1 = 0$

c) $d : \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha : x + 2y - 4z - 4 = 0$

a) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2k \\ 5-2k \\ 3+2k \end{pmatrix}$

Remplacer le point dans (2) : $2(3+2k) + 5 - 2k - (3+2k) + 15 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow 6 + 4k + 5 - 2k - 3 - 2k + 15 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow 23 \neq 0 \Rightarrow$ (d) et α sont parallèles

b) $(d) : x - 1 = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$

$\Rightarrow (d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1k \\ -1-2k \\ 0+6k \end{pmatrix}$

Remplacer le point dans (α) : $2(1+k) + 3(-1-2k) + 6k - 1 = 0 \Rightarrow 2k - 2 = 0$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow I(2; -3; 6)$

$\Rightarrow$ (d) et α sont concourants en $I(2; -3; 6)$

c) $(d) : \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4z = 0 \Rightarrow z = \dfrac{x-2}{2}$

$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y - 2z = 2 \Rightarrow z = y - 1$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$

$\Rightarrow 2 + 2k + 2(1+k) - 4k - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ (d) et α sont confondus

3.5.13 Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

a) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\quad$ $\beta : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$

b) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\quad$ $\beta : \begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$

c) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\beta : \begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$, avec $p, q \in \mathbb{R}$

a) α : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

β : $3x + 2y + 5z - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\alpha$ et $\vec{n}_\beta$ non colinéaires $\Rightarrow$ plans concourants

* $+ \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \\ 3x + 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

$6x + 10z - 8 = 0 \iff 3x + 5z - 4 = 0$

$\Rightarrow 5z = -3x + 4 \Rightarrow \frac{z}{1} = \frac{x - \frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}}$

* $- \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \\ 3x + 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

$6x - 4y - 0z - 0 = 0 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow \frac{x - \frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{0}{1} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$ deux plans concourants en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

b) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\beta : \begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$, $k, n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ deux vecteur directeurs :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \vec{n}_\alpha$

$\Rightarrow \vec{n}_\alpha$ et $\vec{n}_\beta$ sont colinéaires

$B(4;2;0) \in \beta$ et $B(4;2;0) \notin \alpha$ car :

$3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 - 4 = 12 - 4 - 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ α et β sont deux plans parallèles

c) $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}_\beta = -2 \vec{n}_\alpha$ $\Rightarrow$ deux vecteurs colinéaires

$A(1;1;3) \in \alpha$, $B(2;2;2) \Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ α et β sont deux plans confondus

3.5.14 Calculer les coordonnées du point d'intersection des plans $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ et $x - 3y + 2z - 11 = 0$.

point d'intersection des plan $\Leftrightarrow$ système d'équations

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_3 \text{ et } 2L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 + 5L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 - L_3 \text{ et } L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow I\,(1\,;-2\,;2)$$

3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ (α), $2x - y - z + 2 = 0$ (β) et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ (γ) ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ -15 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{d}_2 = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont colinéaires, mais β n'est pas parallèles à $\gamma \Rightarrow$ les plans ont une droite commune $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 7x + 4y + 7z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \quad | \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow 15x + 3z + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{z+3}{-5}$$

et $\begin{cases} 7x + 4y + 7z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad | \cdot (7)$

$14x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y-5}{7}$

$\Rightarrow \boxed{(d) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{7} = \dfrac{z+3}{-5}}$

3.6 Problèmes métriques dans l'espace

3.6.1 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations :

$$(d_1)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \text{avec } k\in\mathbb{R} \quad \text{et } (d_2)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \text{avec } m\in\mathbb{R}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

ici, c'est l'angle entre 2 vecteurs directeurs.

$\vec{d_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{d_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\rightarrow \vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = 1-1+2=2$

$\Rightarrow \|\vec{d_1}\| = \sqrt{1+1+2} = 2 = \|\vec{d_2}\|$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\|\,\|\vec{d_2}\|} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

3.6.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les plans α et β :

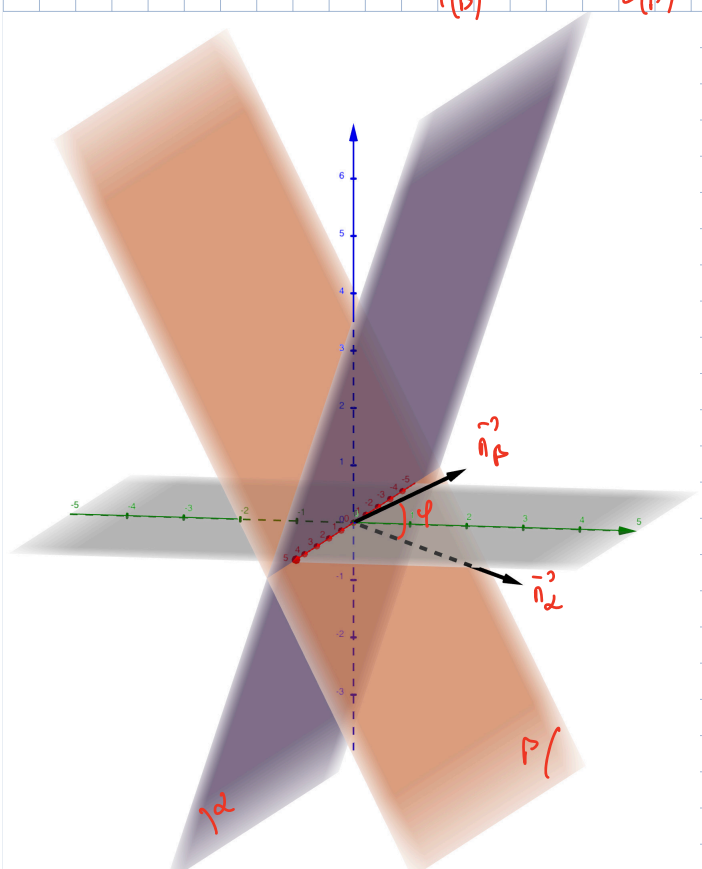
a) $\alpha : 3y - z = 0$ $\qquad$ $\beta : 2y + z = 0$

b) $\alpha : \begin{cases} x &= 5 + 4\lambda - \mu \\ y &= -7 + 1\lambda + 2\mu \\ z &= 11 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $u, v \in \mathbb{R}$

$\vec{d}_{1(\beta)}$ $\qquad$ $\vec{d}_{2(\beta)}$

=> $\vec{d}_{1(\alpha)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{d}_{2(\alpha)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



$(\alpha) : 3y - z = 0$

=> $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ => $\|\vec{n}_\alpha\| = \sqrt{10}$

$(\beta) : 2y + z = 0$

=> $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ => $n_\beta = \sqrt{5}$

Angle entre 2 plans => angle entre 2 vecteurs normaux.

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

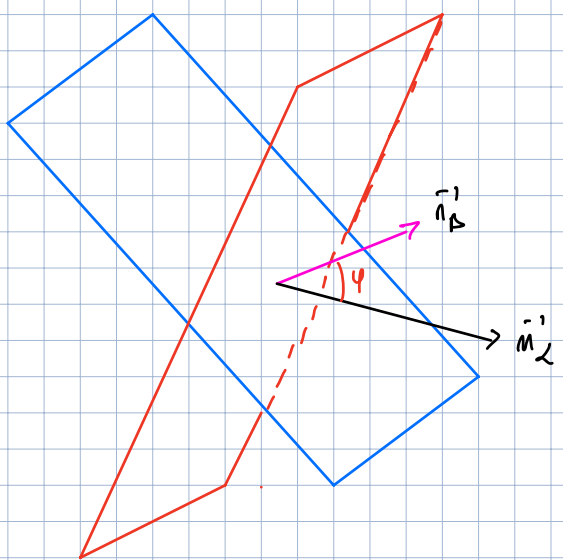
=> $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 1 = 5$

=> $\cos(\varphi) = \dfrac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ => $\varphi = 45^\circ$

=> $\boxed{\varphi = 45^\circ}$

b) $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_{1(\alpha)} \wedge \vec{d}_{2(\alpha)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -23 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\beta = \vec{d}_{1(\beta)} \wedge \vec{d}_{2(\beta)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$



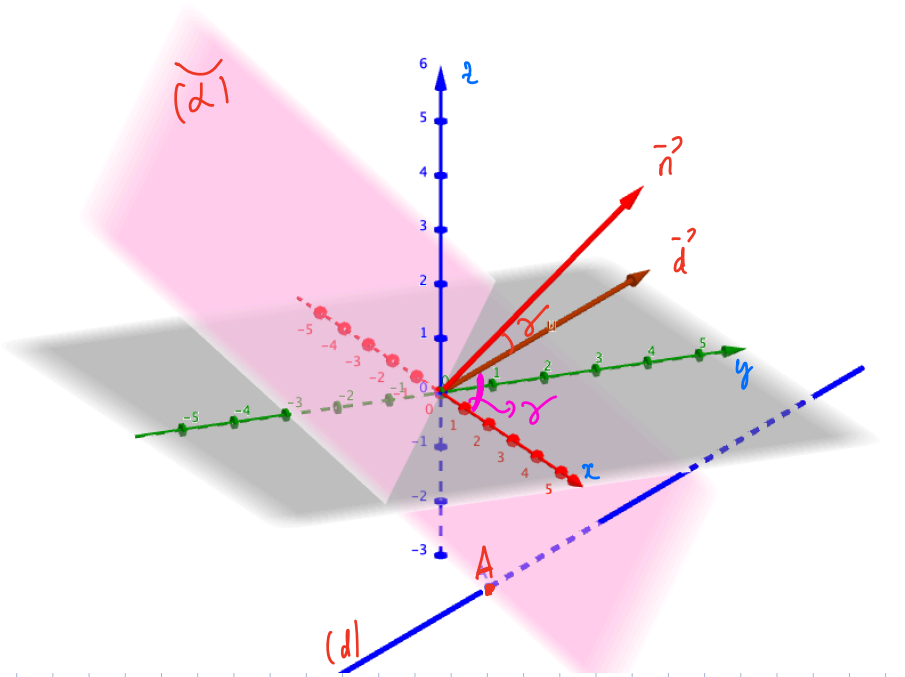
$\Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 7$

$\Rightarrow \cos(\varphi) = \left| \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \|\vec{n}_\beta\|} \right|$

$= \frac{7}{\sqrt{611} \cdot \sqrt{41}}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi \approx 87{,}47^\circ}$

3.6.3 Calculer l'angle aigu entre la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$, et le plan $\alpha : 2x + 3y + 4z = 0$.



$$(d) : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 0 + 5k \\ z = -3 + k \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha) : 2x + 3y + 4z = 0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow \gamma \approx 59,43°$$

$\Rightarrow$ L'angle entre (d) et $(\alpha) = 90° - \gamma = 90° - 59,43° \approx 30,57°$

$\rightarrow$ $\boxed{\varphi = 30,57°}$

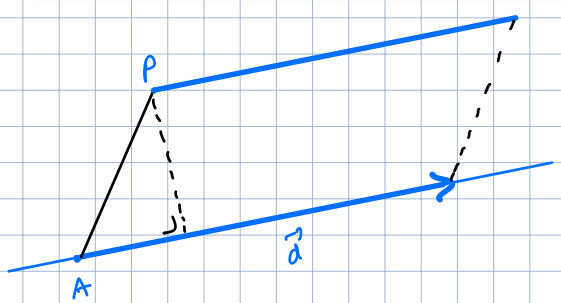
3.6.4 Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a) $P(-5;4;-2)$ $\qquad d : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = k - 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$,

b) $P(5;-2;1)$ $\qquad d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Rappel :

$$\delta(P;d) = \frac{\| \vec{AP} \wedge \vec{d} \|}{\| \vec{d} \|}$$



a) $(d) : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = -1 + k \end{cases} \Rightarrow A(3;2;-1) \in (d)$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} -5-3 \\ 4-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{AP} \wedge \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \delta(P;d) = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{5\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ u

b) $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; k \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A(-3 ; 8 ; 16) \in (d)$

$\rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ -2-8 \\ 1-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$

or $\vec{AP} \wedge \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -31 \\ 58 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \delta(P ; d) = \frac{15\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \boxed{15}$

3.6.5 Vérifier que les droites d'équations $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$, et $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{1-z}{9}$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

$(d_1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad ; \; k \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(d_2) : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{1-z}{9} \rightarrow \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\left(\rightarrow \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{6} = -\dfrac{(z-1)}{9} \right.$

$\Rightarrow \vec{d_1}$ colinéaire à $\vec{d_2} \Rightarrow (d_1) \parallel (d_2)$

Par ex $A(1;-1;0) \in (d_1)$ et $P(3;0;1) \in (d_2)$

$\rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0+1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AP} \wedge \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \delta(P; d_2) = \dfrac{\sqrt{(-10)^2 + (14)^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2}} = \dfrac{\sqrt{332}}{\sqrt{56}} = \dfrac{2\sqrt{83}}{2\sqrt{14}}$

$\Rightarrow \boxed{\delta(P; d_1) = \dfrac{\sqrt{1162}}{14} \; u}$

3.6.6 Calculer la distance des droites a et b lorsque :

a) $a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{R}$

b) $a : \dfrac{x-3}{-6} = y+1 = \dfrac{z-4}{2}$ $\quad b : \begin{cases} x = 6-4k \\ y = k-4 \\ z = k+1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$

a)

$(a) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A(1;1;0)} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow O(0;0;0) \rightarrow \vec{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rappel :

$$\delta(d_1 ; d_2) = \frac{\left| (\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}) \cdot \vec{AB} \right|}{\| \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} \|} = \frac{\left| \det(\vec{AB} ; \vec{d_1} ; \vec{d_2}) \right|}{\| \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} \|}$$

$\Rightarrow \det(\vec{AO} ; \vec{a} ; \vec{b}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \| \vec{a} \wedge \vec{b} \| = \sqrt{64+1+16} = 9$

$$\Rightarrow \delta = \frac{9}{9} = 1\,\text{LE} \quad \Rightarrow \boxed{\delta(a;b) = 9\,\text{LE}}$$

b) (a): $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}$

$$\Rightarrow A(3;-1;4), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b): $\begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = k - 4 \\ z = k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$

$$\Rightarrow B(6;-4;1); \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ -4+1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \sqrt{9} = 3$$

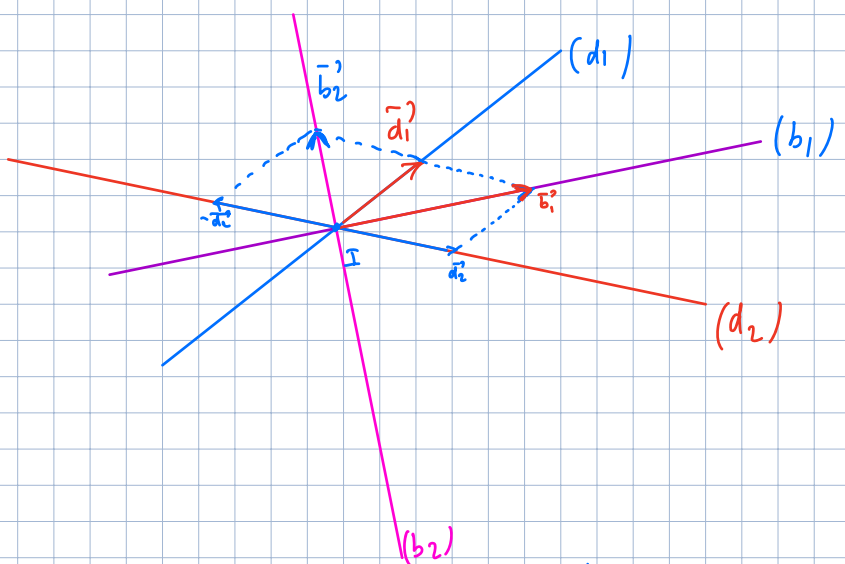
$$\Rightarrow \det\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{AB}\right) = \begin{vmatrix} -6 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 9 + 18 = 9$$

$$\Rightarrow \delta(a;b) = \frac{9}{3} \Rightarrow \boxed{\delta(a;b) = 3\,\text{LE}}$$

3.6.7 Considérons les droites concourantes d_1 et d_2 données ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2.



$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\|\vec{d_1}\| = \|\vec{d_2}\| = \sqrt{14}$

* bissectrice (b_1) : $\vec{b_1} = \vec{d_1} + \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

* bissectrice (b_2) : $\vec{b_2} = \vec{d_1} - \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

* $I = (d_1) \cap (d_2) \Rightarrow \begin{cases} 2 + k = 2n \\ 3 + 3k = 4 - n \\ -1 + 2k = 2 - 3n \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow I(2 ; 3 ; -1)$

Donc $(b_1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

$(b_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $m \in \mathbb{R}$

3.6.8 Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants :

a) $P(-8;7;0)$ $\qquad \alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0,$

b) $P(6;1;-2)$ $\qquad \alpha : \begin{cases} x &= 3 - 4\lambda + 8\mu \\ y &= 2 - 3\lambda + 2\mu \\ z &= 1 + 3\lambda + 6\mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Rappel :

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

a) $\delta(P;\alpha) = \dfrac{|2\cdot(-8) - 2(7) + 0 + 6|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{|-16-14+6|}{\sqrt{9}}$

$\Rightarrow \delta(P;\alpha) = \dfrac{24}{3} = \boxed{8\ u}$

b) (α) sous forme paramétrique $\rightarrow$ transformer en cartésienne

$\Rightarrow$ 3 vecteurs : $\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont coplanaires

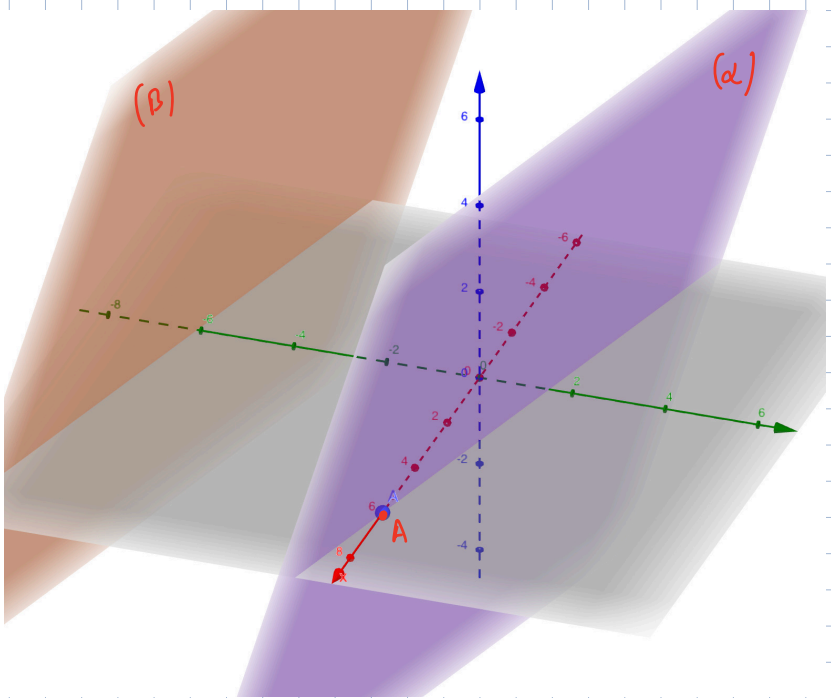
$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 8 \\ y-2 & -3 & 2 \\ z-1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -24(x-3) + 48(y-2) + 16(z-1)$

$= -24x + 48y + 16z - 40 = 0$

$\Rightarrow (\alpha) : 3x - 6y - 2z + 5 = 0$

$\Rightarrow \delta(P;\alpha) = \dfrac{|18 - 6 + 4 + 5|}{\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{21}{7} = \boxed{3\ u}$

3.6.9 Vérifier que les plans d'équations $3x + 12y - 4z = 18$ et $-6x - 24y + 8z - 146 = 0$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.



$\vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{n_\beta} = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n_\alpha}$ colinéaire à $\vec{n_\beta}$

$\Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$

- On cherche un point sur (α)

$\Rightarrow$ ex : $A(6;0;0)$

$$\Rightarrow \delta((\alpha);(\beta)) = \delta(A;\beta) = \frac{|-6\cdot(6) - 24\cdot 0 + 8\cdot 0 - 146|}{\sqrt{36 + 576 + 64}} = \frac{182}{26}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(A;\beta) = 7u}$$

3.6.10 Trouver les équations des plans situés à une distance 6 du plan d'équation

$$\alpha : \; 9x + 2y - 6z - 8 = 0$$

- On cherche un point $\in (\alpha)$, par exemple : $x = 0$, $z = 0 \Rightarrow y = 4$

  $\rightarrow A(0; 4; 0) \in (\alpha)$

- $\delta(A; \beta)$ où $(\beta) \parallel (\alpha) \Rightarrow (\beta) : 9x + 2y - 6z + d = 0$

  $\Rightarrow \delta(A; \beta) = \dfrac{|9 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 0 + d|}{\sqrt{81 + 4 + 36}} = \dfrac{|d + 8|}{11} = 6$

  $\Rightarrow |d + 8| = 66$

  • $d + 8 = -66 \Rightarrow d = -74$

  $\rightarrow (\beta_1) : 9x + 2y - 6z - 74 = 0$

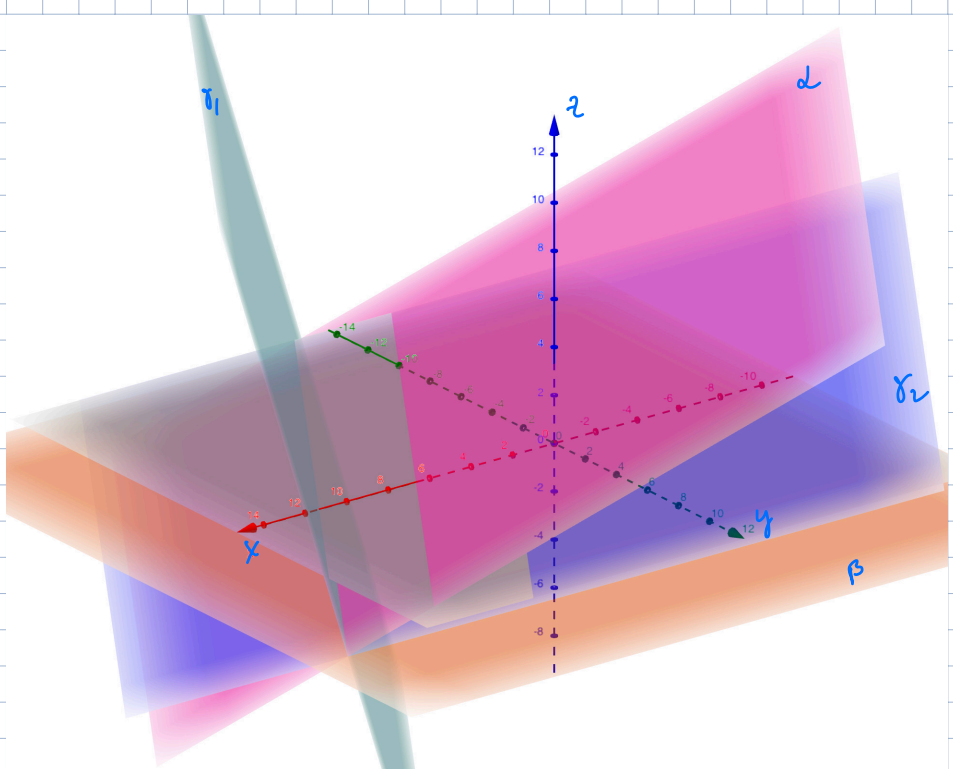
  • $d + 8 = 66 \rightarrow d = 58$

  $\Rightarrow (\beta_2) : 9x + 2y - 6z + 58 = 0$

3.6.11 Déterminer les équations des plans bissecteurs des plans $\alpha : 3x + 6z = 2y + 20$ et $\beta : z + 2 = 0$.

Rappel :

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



$$\frac{3x - 2y + 6z - 20}{7} = \pm \frac{z+2}{1} \Rightarrow 3x - 2y + 6z - 20 = \pm 7(z+2)$$

$$\Rightarrow (\gamma_1) : 3x - 2y - z - 34 = 0$$

et

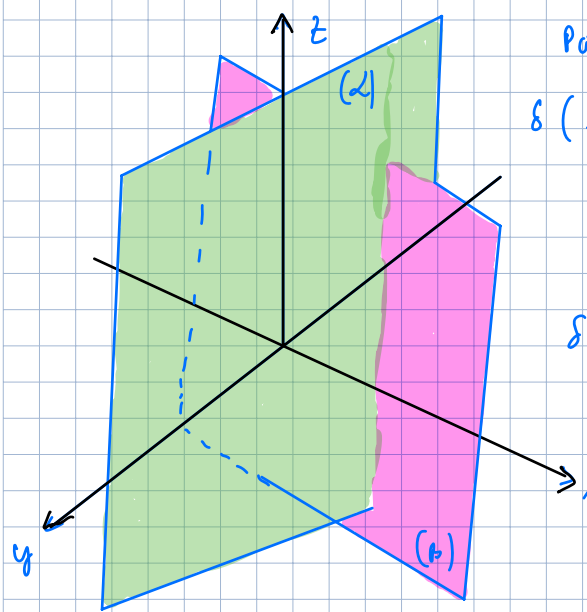
$$(\gamma_2) : 3x - 2y + 13z - 6 = 0$$

3.6.12 Calculer les coordonnées des points de la droite d'équation

$$(d):\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

qui sont équidistants des plans α et β d'équations respectives

$$6\,x - y - 2\,z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 3\,x + 4\,y = 4\,z + 9$$



Pour $I\ (5+3k\ ;\ 13+7k\ ;\ 7+5k) \in (d)$

$$\delta(I\ ;\alpha) = \frac{|6(5+3k) - (13+7k) - 2(7+5k) + 3|}{\sqrt{36+1+4}}$$

et

$$\delta(I\ ;\beta) = \frac{|3(5+3k) + 4(13+7k) - 4(7+5k) - 9|}{\sqrt{9+16+16}}$$

$$\delta(I\ ;\alpha) = \delta(I\ ;\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6(5+3k) - 13 - 7k - 2(7+5k) + 3|}{\sqrt{41}} = \frac{|3(5+3k) + 4(13+7k) - 4(7+5k) - 9|}{\sqrt{41}}$$

$$\Leftrightarrow 6(5+3k) - 13 - 7k - 14 - 10k + 3 = \pm\left(3(5+3k) + 4(13+7k) - 4(7+5k) - 9\right)$$

$$\Leftrightarrow 30 + 18k - 24 - 17k = \pm\left(15 + 9k + 52 + 28k - 28 - 20k - 9\right)$$

$$\Leftrightarrow 6 + k = \pm\left(30 + 17k\right)$$

- $6 + k = 30 + 17k \rightarrow 16k = -24 \rightarrow k = -\frac{24}{16} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\rightarrow I_1\left(5 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)\ ;\ 13 + 7\left(-\frac{3}{2}\right)\ ;\ 7 + 5\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

$\rightarrow I_1 \left(5 - \frac{9}{2} \; ; \; 13 - \frac{21}{2} \; ; \; 7 - \frac{15}{2} \right) \rightarrow \boxed{I_1 \left(\frac{1}{2} \; ; \; \frac{5}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} \right)}$

- $6 + k = -30 - 17k \rightarrow 18k = -36$

$k = -2$

$\rightarrow I_2 \left(5 + 3(-2) \; ; \; 13 + 7(-2) \; ; \; 7 + 5(-2) \right)$

$\rightarrow \boxed{I_2 \left(-1 \; ; \; -1 \; ; \; -3 \right)}$

! On peut déterminer ensuite les plans bissecteurs qui contient I_1 et I_2 :

$$\frac{6x - y - 2z + 3}{\sqrt{41}} = \pm \frac{3x + 4y - 4z - 9}{\sqrt{41}}$$

$\Rightarrow 6x - y - 2z + 3 = \pm (3x + 4y - 4z - 9)$

$\rightarrow (\gamma_1) : 3x - 5y + 2z + 12 = 0$

et $(\gamma_2) : 3x + y - 2z - 2 = 0$

Puis on pose $I(5 + 3k \; ; \; 13 + 7k \; ; \; 7 + 5k)$ point sur $(\gamma_1) / (\gamma_2)$

$\rightarrow 3(5 + 3k) - 5(13 + 7k) + 2(7 + 5k) + 12 = 0$

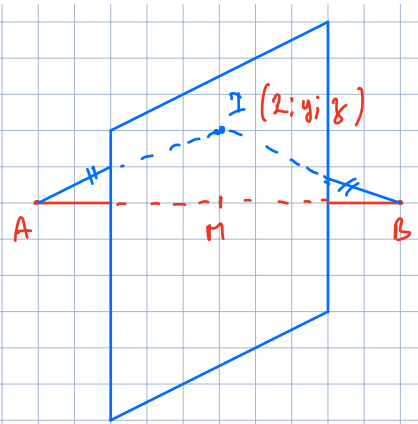
$\rightarrow k = \dots \rightarrow I_1$ et I_2

3.6.13 Déterminer les points d'abscisse 2 équidistants des points

$$A(-1;5;4) \quad \text{et} \quad B(1;-1;-2)$$

qui sont situés à une distance de 3 du plan Oxz.

$I(2;y;z)$



$\star \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{AB} = \vec{n}_\alpha$

$\Rightarrow (\alpha) : \quad x - 3y - 3z + d = 0$

$\star$ M est le milieu de AB

$\Rightarrow M(0;2;1)$ et $M \in (\alpha)$

$\Rightarrow \quad 0 - 3\cdot 2 - 3\cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 9$

$\Rightarrow (\alpha) : \quad x - 3y - 3z + 9 = 0$

$\star$ plan Oxz : équation $y = 0$

$\Rightarrow$ on a deux plans :

$(\beta_1) : \quad y - 3 = 0$

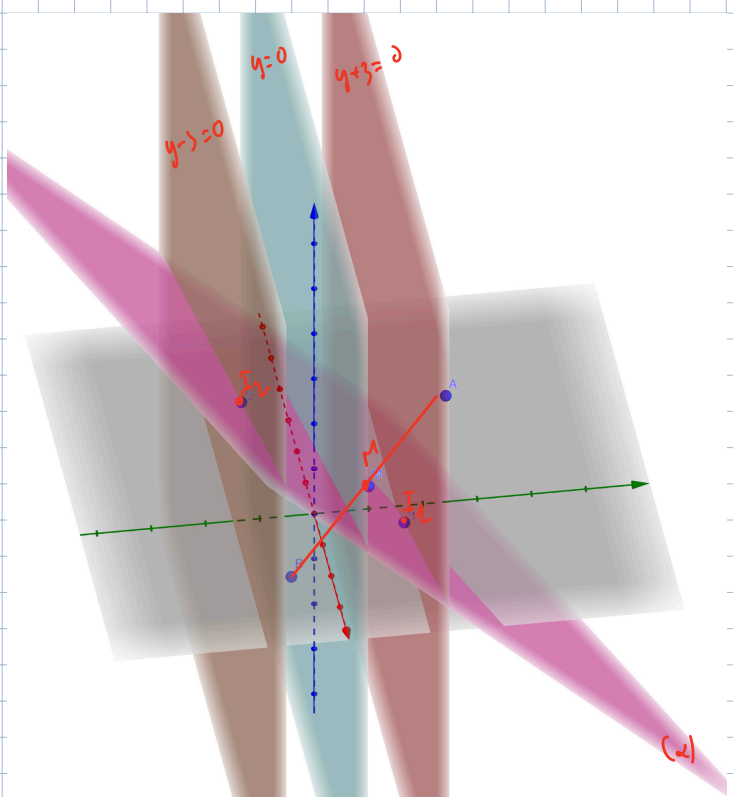
$(\beta_2) : \quad y + 3 = 0$

$\star$ avec $(\beta_1) : \quad y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ et on a $x = 2$

$I \in (\alpha) \Rightarrow \quad 2 - 3\cdot 3 - 3z + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad 3z = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{I_1\left(2;3;\frac{2}{3}\right)}$



* Avec (β_2) : $y+3=0 \Rightarrow y=-3$ et $x=2$

$I \in (d) \Rightarrow 2-3(-3)-3z+9=0$

$\Rightarrow 3z=20 \Rightarrow z=\frac{20}{3}$

$\rightarrow \boxed{I_2\left(2\,;-3\,;\frac{20}{3}\right)}$