Algèbre linéaire

3 mrf

1.2 Espaces vectoriels

1.2.1 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha; u) \longmapsto 0$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

→ loi de composition externe : $2 \cdot u \neq u$

⇒ L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces 2 lois n'est pas un e.v

1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x; y) + (x'; y') \longmapsto (x + x'; y + y')$$

$$\alpha(x; y) \longmapsto (\alpha x; y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

En a : $(\alpha + \beta)(x; y) = ((\alpha+\beta)(x; y) \neq ((\alpha+\beta)x; 2y) = (\alpha x; y) + \beta x; y)$

$= \alpha \cdot (x; y) + \beta \cdot (x; y)$

1.2.3 On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

des opérations usuelles :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Prouver que, muni des deux opérations ci-dessus, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ; préciser l'élément neutre de l'opération + et l'opposé d'une matrice donnée.

⇒ Vérifier les 8 propriétés (4 pour + ; 4 pour ·) ⇒ c'est un e.v

On a :

- $\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ associativité de l'addition

- $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ commutativité de l'addition

- $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{élément neutre}} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\exists$ un élément neutre pour l'addition

- $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{pmatrix}}_{\text{opposé}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\exists$ un symétrie pour l'addition (opposé)

- $\left(\alpha \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha\beta a & \alpha\beta b \\ \alpha\beta c & \alpha\beta d \end{pmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $\alpha \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(b_1 + b_2) \\ \alpha(c_1 + c_2) & \alpha(d_1 + d_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \alpha c_2 & \alpha d_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

- $(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c & (\alpha+\beta)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta a & \alpha b+\beta b \\ \alpha c+\beta c & \alpha d+\beta d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1.2.4 Si V est un espace vectoriel, $u, v \in V$, parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $\frac{u}{3}$ oui

b) $\frac{u+v}{2} - u$ oui

c) $u - 4$ non

d) $\frac{u}{v} + \frac{v}{u}$ non

e) $u^2 - 2u + 1$ non

f) $2u - 3uv$ non

1.2.5 Soit T l'ensemble des applications de $[0; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = a\cos(x) + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble T, muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

Soient $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x) \in T$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x) = (a_1 + a_2 + a_3)\cos(x) + b_1 + b_2 + b_3$

$= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ ⇒ associativité de l'addition

- $f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)\cos(x) + b_1 + b_2 = f_2(x) + f_1(x)$ ⇒ commutativité de l'addition

- $0 + a\cos(x) + b = a\cos(x) + b$ ⇒ ∃ un élément neutre pour l'addition

0 : élément neutre

- $a\cos(x) + b + (-a\cos(x) - b) = 0$ ⇒ ∃ un symétrie pour l'addition (opposé)

$-a\cos(x) - b$: opposé

- $\alpha(\beta f(x)) = \alpha\beta\cos(x) + \alpha\beta b = (\alpha\beta) f(x)$

- $1 \cdot f(x) = a\cos(x) + b = f(x)$

- $\alpha\left(f_1(x)+f_2(x)\right) = \alpha\left(a_1+a_2\right)f(x) + \alpha\left(b_1+b_2\right) = \alpha a_1 \cos(x) + \alpha b_1 + \alpha a_2 \cos(x) + \alpha b_2$
  $= \alpha\left(a_1\cos(x)+b_1\right) + \alpha\left(a_2\cos(x)+b_2\right) = \underline{\alpha f_1(x) + \alpha f_2(x)}$
- $\left(\alpha+\beta\right)f(x) = \left(\alpha+\beta\right)a\cos(x) + \left(\alpha+\beta\right)b = \alpha a\cos(x) + \alpha b + \beta a\cos(x) + \beta b$
  $= \alpha\left(a\cos(x)+b\right) + \beta\left(a\cos(x)+b\right) = \underline{\alpha f(x) + \beta f(x)}$

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x;y;z) | x = 12\}$ $\quad$ $B = \{(x;y;z) | z = 0\}$

$C = \{(x;y;z) | y = 3x\}$ $\quad$ $D = \{(x;y;z) | 2x + y + z = 21\}$

$E = \{(x;y;z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$ $\quad$ $F = \{(x;y;z) | xy = z\}$

$G = \{(x;y;z) | x^2 + y^2 = z^2\}$ $\quad$ $H = \left\{(x;y;z) | x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$

Rappel :

1) Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E forme un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que :

   i) $u+v \in F$ pour tous $u, v \in F$;

   ii) $\lambda \cdot u \in F$ pour tous $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

2) c'est une condition nécessaire, mais non suffisante, qu'un sous-ensemble F de E contienne le vecteur nul pour être un sous-espace vectoriel de E.

* $A = \{(x;y;z) | x = 12\}$

$\Rightarrow (12;y;z) \in A$; $\exists \lambda = 2 \in \mathbb{R}$ tq $2(12;y;z) = (24;2y;2z) \notin A$

Donc A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $B = \{(x;y;z) | z = 0\}$

$\Rightarrow (x_1;y_1;0), (x_2;y_2;0) \in B$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq : $\alpha(x_1;y_1;0) + \beta(x_2;y_2;0) = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2; 0) \in B$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $C = \{(x;y;z) \mid y = 3x\}$

$\Rightarrow (x_1; 3x_1; z_1), (x_2; 3x_2; z_2) \in C$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1; 3x_1; z_1) + \beta(x_2; 3x_2; z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 ; 3(\alpha x_1 + \beta x_2) ; \alpha z_1 + \beta z_2) \in C$

Donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $D = \{(x;y;z) \mid 2x + y + z = 2\}$

$\exists (0; 2; 0)$

Alors $(0;2;0) + (0;2;0) = (0; 4; 0) \notin D$

Donc D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $E = \{(x;y;z) \mid 3x + 4y - 5z = 0\}$

$\exists (x_1; y_1; z_1) ; (x_2; y_2; z_2) \in E$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1; y_1; z_1) + \beta(x_2; y_2; z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 ; \alpha y_1 + \beta y_2 ; \alpha z_1 + \beta z_2)$

$\Rightarrow 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 4(\alpha y_1 + \beta y_2) - 5(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha \underbrace{(3x_1 + 4y_1 - 5z_1)}_{0} + \beta \underbrace{(3x_2 + 4y_2 - 5z_2)}_{0} = 0$

$\Rightarrow \alpha(x_1; y_1; z_1) + \beta(x_2; y_2; z_2) \in E$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $F = \{(x;y;z) \mid xy = z\}$

$(1;1;1) \in F$; $2(1;1;1) = (2;2;2) \notin F$

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $G = \{(x;y;z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

$(1;0;1)$; $(0;1;1) \in G \Rightarrow (1;0;1) + (0;1;1) = (1;1;2) \notin G$

Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* $H = \left\{ (x;y;z) \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\}$

$(x_1 ; 2x_1 ; 3x_1)$; $(x_2 ; 2x_2 ; 3x_2) \in H$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1 ; 2x_1 ; 3x_1) + \beta(x_2 ; 2x_2 ; 3x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 ; 2(\alpha x_1 + \beta x_2) ; 3(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in H$

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont B, C, E et H

1.2.7 Soit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soient f, g deux fonctions réelles paires ; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ est paire

Donc l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soient f, g 2 fonctions réelles impaires $\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f + \beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ est impaire.

Donc l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel.

1.2.8 a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

b) $B = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$?

a) Soient $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & 0 \\ 0 & \alpha a_1 + \beta a_2 \end{pmatrix} \in A$$

Donc A est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) Soient $f, g \in B$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$$(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha f(1) + \beta g(1) = (\alpha f + \beta g)(1)$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in B$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

c) Soit $p \in C$

$\Rightarrow p + (-p) = 0 \notin C \Rightarrow$ C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$

1.2.9 Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_I$ des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_I$.

Soient f et $g \in \mathcal{D}_I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)(x)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{D}_I$

$\Rightarrow \mathcal{D}_I$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_I$

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x; y; z; t) | x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Soient $(x_1 ; y_1 ; z_1 ; t_1)$, $(x_2 ; y_2 ; z_2 ; t_2) \in A$

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq :

$\alpha(x_1 ; y_1 ; z_1 ; t_1) + \beta(x_2 ; y_2 ; z_2 ; t_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 ; \alpha y_1 + \beta y_2 ; \alpha z_1 + \beta z_2 ; \alpha t_1 + \beta t_2)$

où : $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(2y_1 + z_1) + \beta(2y_2 + z_2) = 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha z_1 + \beta z_2$

et : $\alpha t_1 + \beta t_2 = 5\alpha x_1 + 5\beta x_2 = 5(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$\Rightarrow$ A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

1.2.11 Soit A_α le sous-ensemble de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ constitué des fonctions affines f telles que $f(\alpha) = 0$ (où α est un nombre réel). Montrer que A_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

Soient $f, g \in A_\alpha$, $\exists\, k$ et $m \in \mathbb{R}$ tq :

$(kf + mg)(\alpha) = \underbrace{kf(\alpha)}_{0} + \underbrace{mg(\alpha)}_{0} = 0$

$kf + mg \in A_\alpha \Rightarrow$ A_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$

1.2.12 Montrer que les familles suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont libres :

a) $((1;-1;1);(0;2;-1))$

b) $((0;1);(1;1))$

c) $((2;1;0);(0;1;-1))$

d) $((-1;3);(0;2))$

e) $((\pi;0);(0;e))$

f) $((2;4);(2;5))$

g) $((1;1;0);(1;1;1);(0;-1;1))$

h) $((0;1;1);(0;1;3);(1;3;5))$

Rappel :

- Une famille finie $F = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est un système de générateurs de V si $V = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$, c-à-d si tout vecteur de V est combinaison linéaire de F
- Une famille finie $F = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel V est dite libre si la seule combinaison linéaire des éléments de F qui donne le vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

- Une famille qui n'est pas libre est dite liée
- Les vecteurs d'une famille libre sont dits linéairement indépendants
- Les vecteurs d'une famille liée sont dits linéairement dépendants

a) $((1;-1;1);(0;2;-1))$

libre : $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1(1;-1;1) + \lambda_2(0;2;-1) = (0;0;0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1; -\lambda_1 + 2\lambda_2; \lambda_1 - \lambda_2) = (0;0;0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \text{libre}$$

b) $\left((0;1) ; (1;1) \right)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 (0;1) + \lambda_2 (1;1) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_2 ; \lambda_1 + \lambda_2) = (0;0)$

$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ libre

c) $\left((2;1;0) ; (0;1;-1) \right)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (2;1;0) + \lambda_2 (0;1;-1) = (0;0;0) \Leftrightarrow (2\lambda_1 ; \lambda_1 + \lambda_2 ; -\lambda_2) = (0;0;0)$

$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow$ libre

d) $\left((-1;3) ; (0;2) \right)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (-1;3) + \lambda_2 (0;2) = (-\lambda_1 ; 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0;0)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ libre

e) $\left((\pi;0) ; (0;e) \right)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 (\pi;0) + \lambda_2 (0;e) = (0;0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 \pi ; \lambda_2 e) = (0;0)$

$\begin{cases} \lambda_1 \pi = 0 \\ \lambda_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ libre

f) $((2;4);(2;5))$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1(2;4) + \lambda_2(2;5) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (2\lambda_1 + 2\lambda_2 \; ; \; 4\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0;0)$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ 4(-\lambda_2) + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ donc libre

g) $((1;1;0);(1;1;1);(0;-1;1))$

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1(1;1;0) + \lambda_2(1;1;1) + \lambda_3(0;-1;1) = (0;0;0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 \; ; \; \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \; ; \; \lambda_2 + \lambda_3) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

h) $((0;1;1);(0;1;3);(1;3;5))$

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1(0;1;1) + \lambda_2(0;1;3) + \lambda_3(1;3;5) = (0;0;0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_3 \; ; \; \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \; ; \; \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

1.2.13

a) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $(1;2;-1)$, $(1;-1;3)$ et $(m;-1;2)$, où m est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m forment-ils une famille liée ?

b) Même question avec les vecteurs $(m;2;1)$, $(2;m;3)$ et $(1;2;1)$.

Soient n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, condition pour que ces n vecteurs forment une famille liée : $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 1 - 2(2-3m) - (-1+m) = 5m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{5}}$$

b)
$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff m(m-6) + 2 + 4 - m = m^2 - 7m + 6 = 0$$
$$\iff (m-6)(m-1) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{m = 1 \quad , m = 6}$$

1.2.14 Soit u et v deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $(u;v)$ est une famille libre lorsque $(u(x);v(x))$ est égale à :

a) $(1;x)$ b) $(x;x^2)$ c) $(x;x^4)$ d) $(e^x;x)$

e) $(xe^x;e^{2x})$ f) $(\sin(x);\cos(x))$ g) $(x;\sin(x))$ h) $(\sin(x);\sin(2x))$

a) $(1;x)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_2 = 0$

b) $(x ; x^2)$

$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

c) $(x ; x^4)$

$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 x^4 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$2\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

d) $(e^x ; x)$

$\Rightarrow \lambda_1 e^x + \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_2 = 0$

e) $(xe^x ; e^{2x})$

$\Rightarrow \lambda_1 x e^x + \lambda_2 e^{2x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= e^x (\lambda_1 x + \lambda_2 e^x) = 0$

si $x = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 x e^x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

f) $(\sin(x) ; \cos(x))$

$\Rightarrow \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \sin(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

g) $(x \,;\, \sin(x))$

$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = \pi \Rightarrow \lambda_1 \pi = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$

$\Rightarrow \lambda_2 \sin(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$

h) $(\sin(x) \,;\, \sin(2x))$

$\Rightarrow \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \Rightarrow \lambda_2 \sin(2x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$

1.2.15 Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, la famille $(f_1; f_2; ...; f_n)$ d'éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ définis par $f_k(x) = \sin(kx)$ pour $k = 1, 2, ..., n$ est libre.

Démonstration par récurrence :

* si $k = 1 \Rightarrow \lambda_1 \sin(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow f_1$ libre
* supposons vrai pour $k = n-1$

$\Rightarrow \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \cdots + \lambda_{n-1} \sin((n-1)x) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

* si $k = n$

$\Rightarrow \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \cdots + \lambda_n \sin(nx) = 0$

On dérive deux fois l'expression :

$-\lambda_1 \sin(x) - 4\lambda_2 \sin(2x) + \cdots - n^2 \lambda_n \sin(nx) = 0$

$\Rightarrow n^2 \lambda_1 \sin(x) + n^2 \lambda_2 \sin(2x) + \cdots + n^2 \lambda_{n-1} \sin((n-1)x) + n^2 \lambda_n \sin(nx) = 0$

$-\lambda_1 \sin(x) - 4\lambda_2 \sin(2x) + \cdots - (n-1)^2 \lambda_{n-1} \sin((n-1)x) - n^2 \lambda_n \sin(nx) = 0$

$\Rightarrow (n^2-1)\lambda_1 \sin(x) + (n^2-4)\lambda_2 \sin(2x) + \cdots + (2n-1)\lambda_{n-1} \sin((n-1)x) = 0$

$(f_1; f_2; \cdots; f_n)$ libre : $(n^2-1)\lambda_1 = (n^2-4)\lambda_2 = \cdots = (2n-1)\lambda_{n-1} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n f_n(nx) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$

Donc $(f_1 ; f_2 ; \dots f_n)$ libre

1.2.16 Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ et f, g, h trois éléments de $\mathcal{F}_A$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille $(f;g;h)$ est-elle libre ?

$\exists \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 \underbrace{\frac{2x+1}{x^2-1}} + \lambda_2 \underbrace{\frac{3}{x-1}} + \lambda_3 \underbrace{\frac{1}{2(x+1)}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\lambda_1(2x+1) + 6\lambda_2(x+1) + \lambda_3(x-1) = 0$

$\Rightarrow x(4\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3) + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ libre $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$6\lambda_1 + 12\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$

$\Rightarrow 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 2\lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$

Donc la famille $(f;g;h)$ n'est pas libre car $2f - g - 2h = 0$

1.2.17 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1;1)$ $\quad e_2 = (1;0)$ $\quad u = (0;1)$

b) $e_1 = (1;1)$ $\quad e_2 = (-1;1)$ $\quad u = (1;3)$

Rappel :

Une famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de V si :

- $\mathcal{B}$ est une famille libre
- $\mathcal{B}$ est un système de générateurs : $V = \langle u_1; u_2; \dots; u_n \rangle$

a) $e_1 = (1;1)$; $e_2 = (1;0)$; $u = (0;1)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(1;1) + \lambda_2(1;0) = (0;0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 ; \lambda_1) = (0;0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ libre

ii) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ combinaison linéaire : $(x;y) = u_1(1;1) + u_2(1;0) = (u_1 + u_2 ; u_1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = u_1 + u_2 \\ y = u_1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = x - y \Rightarrow$ système de générateurs

$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y) = u_1 e_1 + u_2 e_2$

Donc $\mathcal{B} = (e_1; e_2) \Rightarrow \boxed{u_{\mathcal{B}} = (1;-1)}$

b) $e_1 = (1;1)$, $e_2 = (-1;1)$; $u = (1;3)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1;1) + \lambda_2(-1;1) = (0;0) \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 ; \lambda_1 + \lambda_2) = (0;0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ libre

ii) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (x;y) = u_1(1;1) + u_2(-1;1) = (u_1 - u_2 ; u_1 + u_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = x \\ u_1 + u_2 = y \end{cases}$

$2u_1 = x + y \Rightarrow u_1 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{x+y}{2} - x = \frac{-x+y}{2}$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y) = u_1 e_1 + u_2 e_2$

Donc $B = (e_1 ; e_2)$ $\Rightarrow$ $u_B = (2;1)$

1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1;1;-1)$ $e_2 = (1;-1;0)$ $e_3 = (1;0;1)$ $u = (0;1;0)$

b) $e_1 = (1;-1;0)$ $e_2 = (0;1;-1)$ $e_3 = (1;0;2)$ $u = (1;1;1)$

a) $e_1 = (1;1;-1)$; $e_2 = (1;-1;0)$; $e_3 = (1;0;1)$ et $u = (0;1;0)$

i) $\lambda_1(1;1;-1) + \lambda_2(1;-1;0) + \lambda_3(1;0;1) = (0;0;0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 ; \lambda_1 - \lambda_2 ; -\lambda_1 + \lambda_3) = (0;0;0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_1$ $\Rightarrow 3\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ii) Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (x;y;z) = u_1(1;1;-1) + u_2(1;-1;0) + u_3(1;0;1)$

$\Rightarrow u_2 = u_1 - y$ et $u_3 = z + u_1$

$u_1 + u_1 - y + z + u_1 = x \Rightarrow u_1 = \frac{x+y-z}{3}$; $u_2 = \frac{x-2y-z}{3}$

$u_3 = \frac{x+y+2z}{3}$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2$ et $u_3 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y;z) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

Donc $B = (e_1; e_2; e_3)$ $\Rightarrow$ $u_B = \left(\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

b) $e_1 = (1;-1;0)$; $e_2 = (0;1;-1)$; $e_3 = (1;0;2)$ et $u = (1;1;1)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0;0;0) \Leftrightarrow \lambda_1 (1;-1;0) + \lambda_2 (0;1;-1) + \lambda_3 (1;0;2) = (0;0;0)$

$\Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_1$; $\lambda_2 = \lambda_1$ $\Rightarrow -3\lambda_1 = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ii) Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (x;y;z) = u_1 (1;-1;0) + u_2 (0;1;-1) + u_3 (1;0;2)$

$\Rightarrow u_3 = \dfrac{x+y+z}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{2x-y-z}{3}$ et $u_2 = \dfrac{2x+2y-z}{3}$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2$ et $u_3 \in \mathbb{R}$ tq $(x;y;z) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

Donc $\underline{\mathcal{B} = (e_1, e_2; e_3)}$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2\cdot 1 - 1 - 1}{3} = 0 \\ u_2 = \dfrac{2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1}{3} = 1 \\ u_3 = \dfrac{1+1+1}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{\mathcal{B}} = (0;1;1)}$$

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est une base de P_2. Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x - 1)^2$.

i) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (2-x) + \lambda_2 (1+2x) + \lambda_3 (1-x^2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\lambda_1 - \lambda_1 x + \lambda_2 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 - \lambda_3 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda_3 x^2 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2) x + 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2(-2\lambda_1) \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$

$\Rightarrow -\lambda_1 - 4\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow -5\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$

ii) Soit $ax^2 + bx + c \in P_2$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = u_1(2-x) + u_2(1+2x) + u_3(1-x^2)$

$= 2u_1 - u_1 x + u_2 + 2u_2 x + u_3 - u_3 x^2$

$ax^2 + bx + c = -u_3 x^2 + (-u_1 + 2u_2) x + 2u_1 + u_2 + u_3$

$\Rightarrow \begin{cases} -u_3 = a \\ -u_1 + 2u_2 = b \\ 2u_1 + u_2 + u_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = -a \\ -u_1 + 2u_2 = b \\ 2u_1 + u_2 = a + c \end{cases} \Rightarrow u_2 = \frac{a + 2b + c}{5}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{2a - b + 2c}{5}$

$\Rightarrow \exists\, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ tq : $ax^2 + bx + c = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

Donc $(2-x ; 1+2x ; 1-x^2)$ est une bse de P_2

* $(x^2)_B = ? \; u_1 = \frac{2}{5}$; $u_2 = \frac{1}{5}$ et $u_3 = -1 \Rightarrow \boxed{(x^2)_B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$

* $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$u_3 = -4$

$u_2 = \frac{4 - 8 + 1}{5} = -\frac{3}{5}$

$u_1 = \frac{8 + 4 + 2}{5} = \frac{14}{5}$

$\Rightarrow \boxed{\left((2x-1)^2\right)_B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}}$

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

Vu que $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ et supposons que :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + \alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 12\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ -6\alpha_1 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 8\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 - 12\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 8\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -20\alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_4 \to 5L_4 - L_3} \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 8\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -20\alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \\ 24\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to 5L_2 + L_3]{L_1 \to 24L_1 - L_4} \begin{cases} 72\alpha_1 = 0 \\ 120\alpha_2 - 960\alpha_3 = 0 \\ -120\alpha_3 = 0 \\ 24\alpha_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \to 5L_2 - 4L_3} \begin{cases} 72\alpha_1 = 0 \\ 600\alpha_2 = 0 \\ -120\alpha_3 = 0 \\ 24\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

On a ainsi montré que la famille $\mathcal{F}$ est libre $\Rightarrow$ donc une base

1.2.21 Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Il y a deux variables libres $y = y$ et $z = z$

$\Rightarrow \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$ est donc de dim 2 (c'est un plan)

En posant $y = \alpha$ et $z = \beta$, on a :

$$\begin{cases} x = 3\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La base cherchée est, par exemple : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 6L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ -y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 - L_2}$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \to -L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{cases} x - 4z = 0 \\ y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

→ Il y a une variable libre z. En posant $z = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 4\alpha \\ y = -5\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \text{ et } \dim = 1$$

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x; y; z; t) | x + y = z - t = 0\}$$

Le système : $\begin{cases} x + y = z - t \\ z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z - t \\ z = t \end{cases}$

admet deux variables libres y et t. En posant $y = \alpha$ et $t = \beta$, on a :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v$$

C'est pourquoi $E = \left\{ (x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - t = 0 \right\}$ admet pour base

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

a) le vecteur $(2;1;3;2)$,

b) les vecteurs $(2;1;0;3)$ et $(1;-2;1;0)$,

c) les vecteurs $(2;0;1;0)$, $(0;0;1;3)$ et $(0;1;1;0)$.

Rappel :

La famille $e_1 = (1;0;0;0)$, $e_2 = (0;1;0;0)$; $e_3 = (0;0;1;0)$ et $e_4 = (0;0;0;1)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

Elle est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soient $e_1 = (1;0;0;0)$; $e_2 = (0;1;0;0)$; $e_3 = (0;0;1;0)$ et $e_4 = (2;1;3;2)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 tel que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (0;0;0;0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

ii) Soit $(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$$

$$= u_1(1;0;0;0) + u_2(0;1;0;0) + u_3(0;0;1;0) + u_4(2;1;3;2)$$

$$= (u_1;0;0;0) + (0;u_2;0;0) + (0;0;u_3;0) + (2u_4;u_4;3u_4;2u_4)$$

$$= (u_1 + 2u_4;\ u_2 + u_4;\ u_3 + 3u_4;\ 2u_4)$$

$$t = 2u_4 \Rightarrow u_4 = \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = u_1 + 2u_4 \\ y = u_2 + u_4 \\ z = u_3 + 3u_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x - t \\ u_2 = y - \frac{t}{2} \\ u_3 = z - \frac{3t}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2, u_3$ et $u_4 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3; e_4)$

b) Soient $e_1 = (0;0;2;0)$; $e_2 = (0;0;0;2)$; $e_3 = (2;1;0;3)$; $e_4 = (1;-2;1;0)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (0;0;0;0)$

$\Rightarrow (2\lambda_3 + \lambda_4 ; \lambda_3 - 2\lambda_4 ; \lambda_1 + \lambda_4 ; \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0;0;0;0)$

$\Rightarrow \lambda_3 = 2\lambda_4 \Rightarrow 5\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -3\lambda_3 = 0$

ii) Soit $(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4$

$(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4 = (2u_3 + u_4 ; u_3 - 2u_4 ; u_1 + u_3 ; u_2 + 3u_3)$

$\Rightarrow u_3 = y + 2u_4 \Rightarrow 2y + 5u_4 = x \Rightarrow u_4 = \frac{x - 2y}{5} \Rightarrow u_3 = \frac{2x + y}{5}$

$u_1 = z - u_3 = \frac{-x + 2y + 5z}{5}$, $u_2 = t - 3u_3 = -\frac{6x - 3y + 5t}{5}$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$

Donc $\boxed{\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)}$

b) Soient $e_1 = (2;0;1;0)$; $e_2 = (0;0;1;3)$; $e_3 = (0;1;1;0)$; $e_4 = (0;0;0;1)$

i) $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (0;0;0;0)$

$\Rightarrow (2\lambda_1 ; \lambda_3 ; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 ; 3\lambda_2 + \lambda_4) = (0;0;0;0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$

ii) Soit $(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4$

$(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4 = (2u_1 ; u_3 ; u_1 + u_2 + u_3 ; 3u_2 + 3u_4)$

$\Rightarrow u_1 = \frac{x}{2} \Rightarrow u_3 = y \Rightarrow u_2 = z - u_1 - u_3 = -\frac{x}{2} - y + z$

$\Rightarrow u_4 = t - 3u_2 = \frac{3x}{2} + 3y - 3z + t$

$\Rightarrow \exists\, u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y;z;t) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_4$

Donc $\boxed{\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)}$

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x;y;z;t) \mid y+z+t=0\}, \quad G = \{(x;y;z;t) \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad z=2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et $F \cap G$.

* Le système : $y + z + t = 0$ admet 3 variables libres x, z et t.

En posant $x = \alpha$, $z = \beta$ et $t = \gamma$, on obtient la solution :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\beta - \gamma \\ z = \beta \\ t = \gamma \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc F admet pour base $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$ et $\boxed{\dim(F) = 3}$

* Le système : $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ admet 2 variables libres y et t. En posant

$y = \alpha$ et $t = \beta$, on trouve la solution :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\beta \\ t = \beta \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc G admet pour base $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(G) = 2$

$\Rightarrow$ Les éléments de $F \cap G$ satisfont les conditions définies par F et G, à savoir le système :

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ x+y=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x+y=0 \\ y+z+t=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \to L_2-L_3}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+3t=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to L_1-L_2} \begin{cases} x-3t=0 \\ y+3t=0 \\ z-2t=0 \end{cases}$$

Ce système possède une variable libre t. En posant $t = \alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 2\alpha \\ t = \alpha \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $F \cap G$ admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim(F \cap G) = 1$

1.2.25 Soit $(e_1; e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(e_2; e_1)$, $(e_1; e_1 + e_2)$, $(e_1 - e_2; e_1 + e_2)$ et $(e_1 + \alpha \cdot e_2; e_2)$ sont aussi des bases de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les composantes de e_1 et de e_2 relativement à chacune de ces bases.

(*) $(e_1 ; e_2)$ est une base $\Rightarrow$ $(e_2 ; e_1)$ est une base (β_1)

(*) $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + e_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + \lambda_2 e_2 = (0;0)$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$(e_1 ; e_2)$ est une base $\Rightarrow \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ \exists k_1, k_2$ tq :

$k_1 e_1 + k_2 e_2 = (x;y)$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$(x;y) = u_1 e_1 + u_2 (e_1 + e_2) = (u_1 + u_2) e_1 + u_2 e_2 = k_1 e_1 + k_2 e_2$

$\Rightarrow u_2 = k_2$, $u_1 = k_1 - k_2$ (*)

$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tq $(x;y) = u_1 e_1 + u_2 e_2$

$\Rightarrow (e_1 ; e_1 + e_2)$ est une base (β_2)

(*) $\lambda_1 (e_1 - e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) e_2 = (0;0)$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$(x;y) = u_1 (e_1 - e_2) + u_2 (e_1 + e_2) = (u_1 + u_2) e_1 + (u_2 - u_1) e_2$

$= k_1 e_1 + k_2 e_2$

$\Rightarrow 2u_2 = k_1 + k_2 \Rightarrow u_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \Rightarrow u_1 = k_1 - u_2 = \frac{k_1 - k_2}{2}$

$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y) = u_1 e_1 + u_2 e_2$

$\Rightarrow (e_1 - e_2 ; e_1 + e_2)$ est une base (β_3)

(*) $\lambda_1 (e_1 + \alpha e_2) + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 e_1 + (\alpha \lambda_1 + \lambda_2) e_2 = (0;0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (x;y) = u_1(e_1 + \alpha e_2) + u_2 e_2 = u_1 e_1 + (\alpha u_1 + u_2) e_2$

$= k_1 e_1 + k_2 e_2$

$\Rightarrow u_1 = k_1 \quad \Rightarrow u_2 = k_2 - \alpha k_1$

$\Rightarrow \exists\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tq : $(x;y) = u_1 e_1 + u_2 e_2$

$\Rightarrow (e_1 + \alpha e_2 ; e_2)$ est une base (B_4)

* Composantes :

$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B_3}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B_3}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_4}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_4}$

* Explications : $u = k_1 e_1 + k_2 e_2 \Rightarrow$ si $u = e_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases} (*) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans la base $(e_1 ; e_1 + e_2)$

si $u = e_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans la base de $(e_1 ; e_1 + e_2)$

Même principe pour B_3 et B_4

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\{(3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3)\}$$

i) Examinons si $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ équivaut au système : $\begin{cases} 3\alpha = 7 \\ 2\alpha = -3 \\ -2\alpha = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to 3L_3 + 2L_1]{L_2 \to 3L_2 - 2L_1}$

$\begin{cases} 3\alpha = 7 \\ 0 = -23 \\ 0 = 17 \end{cases}$ $\Rightarrow$ qui est manifestement impossible !

donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

ii) Examinons si $\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 7\beta = -11 \\ 2\alpha - 3\beta = 8 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to 3L_3 + 2L_1]{L_2 \to 3L_2 - 2L_1}$

$\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = -11 \\ -23\beta = 46 \\ 17\beta = -34 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{17} L_3]{L_2 \to -\frac{1}{23} L_2}$ $\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = -11 \\ \beta = -2 \\ \beta = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - 7L_2}$

$\begin{cases} 3\alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{3} L_1}$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$

Comme $\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en conclut que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

iii) Examinons si $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivaut au système :

$$\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 4 \\ 2\alpha - 3\beta = -5 \\ -2\alpha + \beta = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to 3L_3 + 2L_1]{L_2 \to 3L_2 - 2L_1} \begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 4 \\ -23\beta = -23 \\ 17\beta = 17 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{17} L_3]{L_2 \to -\frac{1}{23} L_2}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 7\beta = 4 \\ \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - 7L_2} \begin{cases} 3\alpha = -3 \\ \beta = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{3} L_1} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en conclut que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$$

En résumé, on a trouvé que :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$$

et que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

En d'autres termes $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constitue une base du sous-espace

vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

* Autre méthode : pour déterminer la dimension de U, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont formées des composantes des générateurs de U, à savoir les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{opérations élémentaires}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/23 \\ 0 & 1 & -17/23 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Donc $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/23 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -17/23 \end{pmatrix} \right)$ est une base par exemple !

1.2.27 Soit $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4$ $\qquad$ $u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$

$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4$ $\qquad$ $u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$

Extraire de la famille $(u_1; u_2; u_3; u_4)$ une base de U.

* u_1, u_2 : $\quad \lambda u_1 = u_2 \Leftrightarrow \lambda(-e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4) = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$

$\Rightarrow -\lambda e_1 + \lambda e_2 + 2\lambda e_3 - \lambda e_4 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$

$$\begin{cases} -\lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ 2\lambda = -1 \\ -\lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ impossible !

$\Rightarrow u_1, u_2$ sont linéairement indépendants.

* u_1, u_2 et u_3 :

$\lambda u_1 + \beta u_2 = u_3 \Leftrightarrow \lambda(-e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4) + \beta(2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4) = 3e_1 + 7e_2 + e_4$

$\Rightarrow -\lambda e_1 + \lambda e_2 + 2\lambda e_3 - \lambda e_4 + 2\beta e_1 + 3\beta e_2 - \beta e_3 + \beta e_4 = 3e_1 + 7e_2 + e_4$

$\Rightarrow e_1(-\lambda + 2\beta) + e_2(\lambda + 3\beta) + e_3(2\lambda - \beta) + e_4(-\lambda + \beta) = 3e_1 + 7e_2 + 0e_3 + e_4$

$$\begin{cases} -\lambda + 2\beta = 3 \\ \lambda + 3\beta = 7 \\ 2\lambda - \beta = 0 \\ -\lambda + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2(1+\lambda) = 3 \\ \lambda + 3(1+\lambda) = 7 \\ 2\lambda - (1+\lambda) = 0 \\ \beta = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2 + 2\lambda = 3 \\ \lambda + 3 + 3\lambda = 7 \\ 2\lambda - 1 - \lambda = 0 \\ \beta = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 4\lambda = 4 \\ \lambda = 1 \\ \beta = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Donc $1 \cdot u_1 + 2 u_2 = u_3$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ sont liné. dépendants.

* u_1, u_2 et u_4 :

$\exists \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\lambda u_1 + \beta u_2 = u_4$

$\lambda(-e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4) + \beta(2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4) = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$

$-\lambda e_1 + \lambda e_2 + 2\lambda e_3 - \lambda e_4 + 2\beta e_1 + 3\beta e_2 - \beta e_3 + \beta e_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$

$e_1(-\lambda + 2\beta) + e_2(\lambda + 3\beta) + e_3(2\lambda - \beta) + e_4(-\lambda + \beta) = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\beta = 1 \\ \lambda + 3\beta = 9 \\ 2\lambda - \beta = 4 \\ -\lambda + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2(\lambda - 1) = 1 \\ \lambda + 3(\lambda - 1) = 9 \\ 2\lambda - \lambda + 1 = 4 \\ \beta = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\lambda - 2 = 1 \\ \lambda + 3\lambda - 3 = 9 \\ \lambda = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 3 \\ 4\lambda = 12 \\ \lambda = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Donc $3u_1 + 2u_2 = u_4$

$\Rightarrow$ u_1, u_2, u_4 sont linéairement dépendants.

Donc par exemple $\boxed{\mathcal{B} = (u_1 ; u_2) \text{ et } \dim(E) = 2}$

* Autre méthode : pour déterminer la dimension de U, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont formés des composantes des générateurs de U, à savoir les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

comme cette matrice est de rang 2, on a $\dim(u) = 2$

$\Rightarrow$ une base de U est donnée par $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ de même pour (u_1, u_2).

pour autant qu'ils soient linéairement indépendants.

$\dim(E) = 2$

1.2.28 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres réels. Calculer la dimension du sous-espace

$$\langle 4x^2 - x + 2; 2x^2 + 6x + 3; -4x^2 + 10x + 2 \rangle$$

dans P_3.

* posons : $p_1(x) = 4x^2 - x + 2$; $p_2(x) = 2x^2 + 6x + 3$; $p_3(x) = -4x^2 + 10x + 2$

Dans la base canonique $(x^3 ; x^2 ; x ; 1)$ de $\mathbb{R}_3[x]$, les polynômes p_1, p_2 et p_3 ont respectivement pour composantes :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* pour déterminer la dimension du sous-espace engendré par p_1, p_2 et p_3, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des composantes de ces vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to 13L_3 - 9L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Attendu que cette matrice est de rang 3, on conclut que

$$\boxed{\dim(\langle p_1 ; p_2 ; p_3 \rangle) = 3}$$

* Autre méthode :

* $\exists \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3 tq : $\lambda p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1(4x^2 - x + 2) + \lambda_2(2x^2 + 6x + 3) + \lambda_3(-4x^2 + 10x + 2) = 0$

$\Rightarrow (4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3)x^2 + (-\lambda_1 + 6\lambda_2 + 10\lambda_3)x + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \Rightarrow \quad -4\lambda_1 + 24\lambda_2 + 40\lambda_3 = 0 \\ \hline 26\lambda_2 + 36\lambda_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2\lambda_1 + 12\lambda_2 + 20\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \hline 15\lambda_2 + 22\lambda_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-18\lambda_3}{13} = \frac{-22\lambda_3}{15}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ $\Rightarrow$ les 3 vecteurs sont lin. indép.

$\Rightarrow \dim\left(\langle 4x^2 - x + 1 ; 2x^2 + 6x + 3 ; -4x^2 + 10x + 2 \rangle\right) = 3$

1.2.29 Soit $F = \langle (1;3;-3;-1;-4); (1;4;-1;-2;-2); (2;9;0;-5;-2) \rangle$ et $G = \langle (1;6;2;-2;3); (2;8;-1;-6;-5); (1;3;-1;-5;-6) \rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$.

Méthode : pour calculer $\dim(F+G)$, il suffit de calculer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des générateurs de F et de G

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ \longrightarrow \\ L_4 \to L_4 - L_1 \\ L_5 \to L_5 - 2L_1 \\ L_6 \to L_6 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 - 3L_2 \\ \\ \longrightarrow \\ L_4 \to L_4 - 3L_2 \\ L_5 \to L_5 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \leftrightarrow L_6]{L_3 \leftrightarrow L_5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \to L_5 - 2L_3]{L_4 \to L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Attendu que cette matrice est de rang 3, on conclut que $\dim(F+G) = 3$

* Calculons $\dim(F)$ en déterminant le rang de la matrice formée par les générateurs de F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque cette matrice est de rang 2, on conclut que $\dim(F) = 2$

* De même, calculons $\dim(G)$ en déterminant le rang de la matrice formée par les générateurs de G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to 4L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -15 \end{pmatrix}$$

Vu que cette matrice est de rang 3, il s'ensuit que $\dim(G) = 3$

Finalement, la relation de Grassmann implique :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 2 + 3 - 3 = 2$$

* Autre méthode :

* $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 (1;3;-3;-1;-4) + \lambda_2 (1;4;-1;-2;-2) = (2;9;0;-5;-2)$

$\Rightarrow$ (calculs ...) $\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$\Rightarrow -1(1;3;-3;-1;-4) + 3(1;4;-1;-2;-2) = (2;9;0;-5;-2) \Rightarrow$ liés

$\Rightarrow \dim(F) = 2$

* $\exists \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 (1;3;-3;-1;-4) + \lambda_2 (1;4;-1;-2;-2) + \lambda_3 (1;6;2;-2;3) = (0;0;0;0;0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_2 \\ -4\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4}\lambda_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3\lambda_2 - 2\lambda_2 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow -2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ ils sont libres

* $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (1;3;-3;-1;-4) + \lambda_2 (1;4;-1;-2;-2) + \lambda_3 (1;6;2;-2;3) = (2;8;-1;-6;-5)$

(calculs) $\Rightarrow \lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ ils sont liés

* $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (1;3;-3;-1;-4) + \lambda_2 (1;4;-1;-2;-2) + \lambda_3 (1;6;2;-2;3) = (1;3;-1;-5;-6)$

(calculs) $\Rightarrow \lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$

$\Rightarrow$ ils sont liés

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim(F+G) = 3}$

* $\exists \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$\lambda_1 (1;6;2;-2;3) + \lambda_2 (2;8;-2;-6;-5) + \lambda_3 (1;3;-1;-5;-6) = (0;0;0;0;0)$

$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 ; 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + \lambda_3 ; 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 ; -2\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5\lambda_3 ; 3\lambda_1 - 5\lambda_2 - 6\lambda_3) = (0;0;0;0;0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 5\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{3}\lambda_2 \\ -7\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{7}{6}\lambda_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}\lambda_2 - \lambda_2 + \frac{7}{6}\lambda_2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ ils sont libres. $\Rightarrow \dim(G) = 3$

par relation Grassmann : $\underbrace{\dim(F+G)}_{3} = \underbrace{\dim(F)}_{2} + \underbrace{\dim(G)}_{3} - \dim(F \cap G)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim(F \cap G) = 2}$

1.2.30 Soit u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $(u;v)$ est une famille libre, alors $\mathbb{R}^2$ est somme directe des sous-espaces engendrés par u et v respectivement.

Rappel :

- L'intersection $A \cap B$ de deux sous-espace vectoriels A et B est un sous-espace vectoriel.
- La somme de deux sous-espace vectoriels A et B de V, est le sous-ensemble, noté $A+B$, défini par : $A+B = \{u+v \mid u \in A, v \in B\}$
- La somme $A+B$ est dite directe si $A \cap B = \{0\}$. Dans le cas d'une somme directe, on note $A \oplus B$.
- La somme $A+B$ est un sous-espace vectoriel de V.
- Si $V = A \oplus B$, alors pour tout vecteur $v \in V$, il existe un unique $a \in A$ et un unique $b \in B$ tel que : $v = a+b$

On a :

$$u, v \in \mathbb{R}^2, \quad \langle u \rangle = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Supposons que (u,v) est libre.

On sait que $\mathbb{R}^2 = \langle u \rangle + \langle v \rangle$ car la dimension de $\mathbb{R}^2$ est 2.

$\Rightarrow$ Pour montrer que la somme est directe, il suffit de voir que :

$$\langle u \rangle \cap \langle v \rangle = \{0\}$$

Soit $w \in \langle u \rangle \cap \langle v \rangle$. On peut écrire : $w = \lambda \cdot u = \beta \cdot v$ pour $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

Si $\lambda \neq 0$, $u = \frac{\beta}{\lambda} \cdot v$, ce qui contredit le fait que (u,v) est libre.

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow w = 0$

Donc l'intersection est nulle et la somme est directe.

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B. Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.

a) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) • Soit $u \in A$, $u = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$v \in B$, $v = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Vu que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $B \subset A$

$\Rightarrow A+B \subset A$ et $\dim(A) = 2$, ce qui fait que $A+B = A \neq \mathbb{R}^3$

• Déterminons $A \cap B$ qui doit être égal à B.

$$u = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x = a\\y = a\\a = a\end{matrix}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = B$$

b) • $A+B = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(A+B) = 3 \Rightarrow A+B = \mathbb{R}^3$

• $A \cap B$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = a \\ y = -a \end{cases}$

$\Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow A \cap B = \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = A \oplus B$, la somme est directe

c) • $A + B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A + B = \mathbb{R}^3$

• Déterminons si la somme est directe : $A \cap B$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ y = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = a \\ y = 2a \\ b = -2a \\ a = a \end{array}$ $\Rightarrow w \in A \cap B$ ssi $w = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cap B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ La somme n'est pas directe.

1.2.32 Dans l'espace vectoriel réel $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

a) on a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

$\Rightarrow$ $\alpha \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha t + \beta s) \\ -(\alpha t + \beta s) & 0 \end{pmatrix} \in A$

et $\alpha \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & c' \\ c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha c + \beta c' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha\beta + \beta b' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a'' & c'' \\ c'' & b'' \end{pmatrix} \in S$

$\Rightarrow$ A et S sont bien des sous-espaces vectoriels de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) • $\dim(A) = 1$ car $A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

• $\dim(S) = 3$ car $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite

• Calculons $A \cap S$: $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $a = b = 0$ et $c = t$ et $c = -t$

$\Rightarrow$ $t = 0$ et $c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = t = 0 \Rightarrow A \cap S = \{0\}$

Vu que $\dim(A + S) = \dim(A) + \dim(S) - \dim(A \cap S)$, on a $A \oplus S = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1.2.33 a) Prouver que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trouver une base de F.

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel G engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une base de $F \bigcap G$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F \quad (x = y = 0)$

vu que : $\begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ 4x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$

$= x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

On voit facilement que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Ces deux vecteurs forment donc une base de F.

b) $\Rightarrow$ calculer le rang de la matrice dont les lignes sont constituées des générateurs de G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \uparrow \begin{matrix} \text{opérations} \\ \text{élémentaires} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

* Autre méthode :

• $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ils sont linéairement dépendants.

• $\exists \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 \\ 2(\lambda_1 + \lambda_2) & 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ ils sont linéairement indépendants.

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) On a :

$$F \cap G : \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On résout ce système comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{opérations élémentaires}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ On en déduit que : $\begin{cases} x = -b \\ y = -2b \\ z = -8b \\ a = -2b \\ b = b \end{cases}$ $\quad$ Si $b = 1$ $\Rightarrow -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

est une base de l'équivalent de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ $F \cap G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle$, par exemple.

* Autre méthode :

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a$ et $b \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 & 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 2\lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 4a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a \\ 4a & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 - a - b = 0 \\ \lambda_2 - a = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4a = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \lambda_1 - \lambda_3 - a = a - a - b - a \\ \lambda_2 = a \\ \lambda_1 = \frac{4a - 2a}{2} = \frac{2a}{2} = a \\ \lambda_3 = 3a - a - a + b = a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{a}{2} \\ \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a \\ \lambda_3 = a + b \\ b = b \end{cases} \quad b=1 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -2 + 1 = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{F \cap G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

1.2.34 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim(\langle A; B; C; D\rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

Rappel :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel F de V, il existe un sous-espace vectoriel G de V (non unique) tel que : $V = F \oplus G$.

⇒ On dit que G est un sous espace supplémentaire de F dans V.

Dans la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

Les matrices A, B, C et D ont respectivement pour composantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⇒ pour calculer $\dim(\langle A; B; C; D\rangle)$, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont données par les composantes des vecteurs A, B, C et D.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 5L_1]{\substack{L_2 \to L_2 + 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Ainsi cette matrice est de rang 2 et $\dim(\langle A; B; C; D\rangle) = 2$

En particulier $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\langle A ; B ; C ; D \rangle$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est manifestement échelonnée.

puisque ces lignes comportent 4 vecteurs linéairement indépendants, ses vecteurs forment une base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, car $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

Comme les deux premières lignes constituent une base de $\langle A ; B ; C ; D \rangle$, les deux dernières lignes forment une base du supplémentaire de $\langle A ; B ; C ; D \rangle$.

En d'autres termes, le supplémentaire de $\langle A ; B ; C ; D \rangle$ admet pour base

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

* <u>autre méthode 1</u> :

⇒ calculer rang de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle A ; B ; C ; D \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\rangle = S_1$

* on peut poser $S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et on voit que $S_1 + S_2 = M_2(\mathbb{R})$

avec $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ $\Rightarrow$ Donc $S_1 \oplus S_2 = M_2(\mathbb{R})$

et S_2 est un supplémentaire de S_1

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\10/3\\4/3\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = b = c = d = 0$

La matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 10/3 & 4/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est échelonnée / réduite $\Rightarrow$ les lignes forment dans une base de $\mathbb{R}^4$

* autre méthode 2 :

- $-2A + B = 0$ $\Rightarrow$ linéairement dépendants (calculs à faire)
- $2A + B = C$ $\Rightarrow$ linéairement dépendants (calculs à faire)
- $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = \begin{pmatrix}\lambda_1 - 3\lambda_2 & 3\lambda_2\\ \lambda_1 + 7\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow$ A et B sont linéairement indépendants. $\Rightarrow \dim(\langle A; B; C; 0\rangle) = \dim(E) = 2$

- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix}\lambda_1 - 3\lambda_2 & 3\lambda_2\\ \lambda_1 + 7\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix} \in E \cap F \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow E \cap F = \{0\} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ base du supplémentaire F.

1.2.35 Dans P_3, on considère les polynômes

$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad p_3 = t^3 + 6t - 5 \quad$ et $\quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

Calculer $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

Dans la base canonique $(t^3, t^2, t, 1)$ de P_3, les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 ont respectivement pour composantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ pour calculer $\dim(\langle P_1; P_2; P_3; P_4 \rangle)$, il suffit de déterminer le rang de la matrice dont les lignes sont données par les composantes des vecteurs P_1, P_2, P_3 et P_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ainsi cette matrice est de rang 2

et $\dim(\langle P_1; P_2; P_3; P_4 \rangle) = 2$

En particulier $(t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \; ; \; t^2 + t - 3)$ forme une base de $\langle P_1; P_2; P_3; P_4 \rangle$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est manifestement échelonnée.

puisque ces lignes comportent 4 vecteurs linéairement indépendants, ses vecteurs forment une base de P_3, car $\dim(P_3) = 4$

Comme les deux premières lignes constituent une base de $\langle P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 \rangle$, les deux dernières lignes forment une base du supplémentaire de $\langle P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 \rangle$.
En d'autres termes, le supplémentaire de $\langle P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 \rangle$ admet pour base $(t ; 1)$.

* Autre méthode 2 :

On peut travailler dans $\mathbb{R}^4$ avec

$\overrightarrow{P_1} = (1 ; -2 ; 4 ; 1)$
$\overrightarrow{P_2} = (2 ; -3 ; 9 ; -1)$
$\overrightarrow{P_3} = (1 ; 0 ; 6 ; -5)$
$\overrightarrow{P_4} = (2 ; -5 ; 7 ; 5)$

et on échelonne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(P) = 2$$

* on peut poser $S = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et on vérifie que

$S \oplus P = P_3$ car $S + P = P_3$ et $S \cap P = \{0\}$

$\Rightarrow S = \langle t ; 1 \rangle \Rightarrow$ la base cherchée est $(t ; 1)$

* Autre méthode 2 :

- On a : $4P_1 - P_2 = P_4 \Rightarrow$ linéairement dépendants (calculs à faire)
- $-3P_1 + 2P_2 = P_3 \Rightarrow$ " "
- $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

$= (\lambda_1 + 2\lambda_2)t^3 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2)t^2 + (4\lambda_1 + 9\lambda_2)t + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow 13\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow P_1, P_2$ liné. indépendants.

$\Rightarrow \dim(\langle P_1; P_2; P_3; P_4 \rangle) = \dim(E) = 2$

- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(t^3; t^2)$

Soit $(\lambda_1 + 2\lambda_2)t^3 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2)t^2 + (4\lambda_1 + 9\lambda_2)t + \lambda_1 - \lambda_2 \in E \cap F$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow 13\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow E \cap F = \{0\}$

$\Rightarrow (t; 1)$ base du supplémentaire F.

1.2.36 Montrer que les sous-espaces des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soit $P = \{ f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$ le s.e.v des fcts paires dans $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

$I = \{ f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$ le s.e.v des fcts impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, on définit $f_{Paire} \in P$

et $f_{impaire} \in I$ comme suit :

$$f_{paire}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{impaire}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x)$$

une petite combine !

On voit facilement que $f_{paire}(x) + f_{impaire}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et donc que $f = f_{paire} + f_{impaire}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\mathbb{R}} = P + I$

Or, si $f \in P \cap I$, $f(x) = f(-x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2f(-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P \cap I = \{0\}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} = P \oplus I$

(0 étant la fct nulle)

1.2.37 Déterminer, en fonction de α et de β le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Rappel :

On appelle rang d'une matrice le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée équivalente (une ligne est nulle si tous ses éléments sont nuls).

$\exists \lambda_1$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ -1 \\ -\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -1 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda_1 = -3 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} + 1\right) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{6}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{7}{5} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{3}{5} + 1 = -\frac{2}{5}$$

$\Rightarrow$ Si $\alpha = -\frac{7}{5}$ et $\beta = -\frac{2}{5}$, alors le rang de A est égal à 2.

Sinon, le rang de A est égal à 3.