Espaces vectoriels réels

A) Espaces vectoriels réels

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur α pour obtenir $\alpha . u$.

$\mathbb{K}$ est un corps, souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ un ensemble non vide E constitue un espace vectoriel réel s'il est muni :

1) d'une loi de composition interne $+$, c-à-d d'une application de $E \times E$ dans E :

$$E \times E \to E \quad \text{telle que}$$
$$(u ; v) \mapsto u+v$$

La loi $+$ vérifie les 4 propriétés suivantes : (4 axiomes)

a) $(u+v)+w = u+(v+w)$ quels que soient $u, v, w \in E$

b) il existe un élément de E, noté 0, tel que $u+0 = 0+u = u$ pour tout $u \in E$

c) pour tout $u \in E$, il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u+(-u) = 0$

d) $u+v = v+u$ quels que soient $u, v \in E$

2) d'une loi de composition externe, c-à-d d'une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E:

telle que : $\mathbb{R} \times E \to E$

$(\alpha ; u) \mapsto \alpha u$

La loi $\cdot$ vérifie les 4 propriétés suivantes : (4 axiomes)

a) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \beta) \cdot u$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u \in E$

b) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u \in E$

c) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$

d) $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$

* Remarque :

- Les propriétés 1)a) : associativité, 1)b) existence d'un élément neutre et 1)c) existence d'un symétrique pour tout élément de E, signifient que l'ensemble E, muni de la loi de composition interne $+$, forme un groupe.
- La propriété 1)d) commutativité veut dire qu'il s'agit d'un groupe abélien ou commutatif.

- On appelle vecteurs les éléments de E, vecteur nul l'élément $0 \in E$, vecteur opposé de u l'élément $-u$ et scalaires les nombres réels.

* Exemple 1 : Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ un élément $u \in E$ est donc un couple $(x ; y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x ; y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

- **Définition de la loi interne :**

Si $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

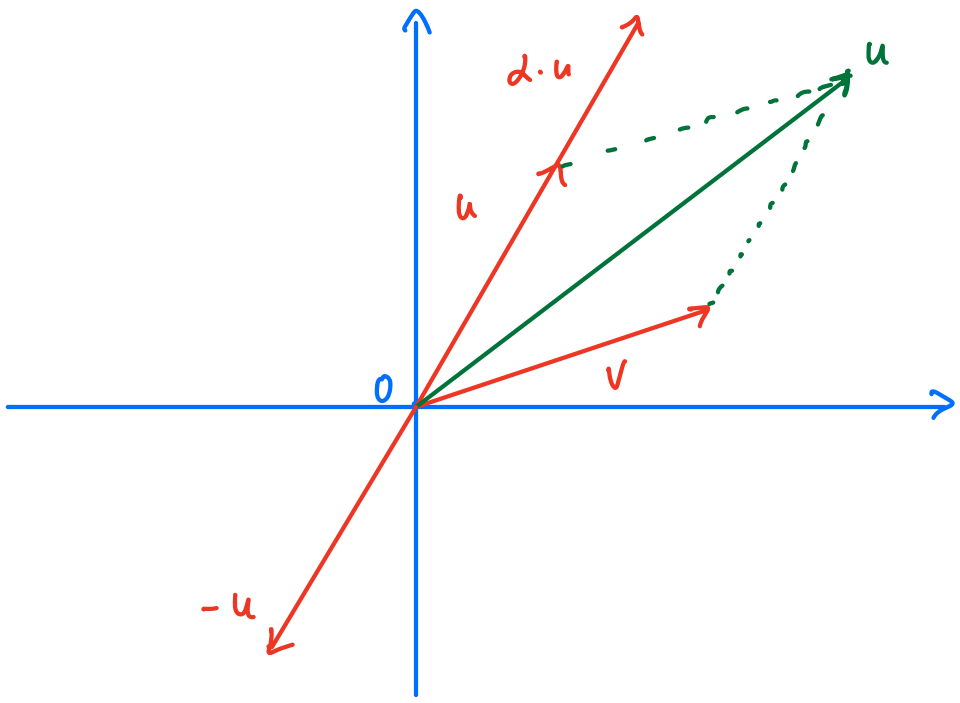
$$(x ; y) + (x' ; y') = (x + x' ; y + y')$$

- **Définition de la loi externe :**

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\alpha (x ; y) = (\alpha x ; \alpha y)$$

- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0 ; 0)$
- Le symétrique de $(x ; y)$ est $(-x ; -y)$, que l'on note aussi $-(x ; y)$.



u et α·u sont colinéaire

* Exemple 2 : Le $\mathbb{R}$- espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

- On pose $\mathbb{K}$ = corps = $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$
- $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1 ; x_2 ; x_3 ; \cdots ; x_n)$
- Définition de la loi interne :

  Si $(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n)$ et $(x_1' ; x_2' ; \cdots ; x_n') \in \mathbb{R}^2$, alors :

  $(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n) + (x_1' ; x_2' ; \cdots ; x_n') = (x_1 + x_1' ; \cdots ; x_n + x_n')$
- Définition de la loi externe :

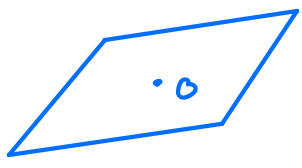
  Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

  $\alpha \cdot (x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n) = (\alpha x_1 ; \alpha x_2 ; \cdots ; \alpha x_n)$
- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0 ; 0 ; \cdots ; 0)$
- Le symétrique de $(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n)$ est $(-x_1 ; -x_2 ; \cdots ; -x_n)$, que l'on note aussi $-(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n)$.

* Exemple 3 : Tout le plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel :

- Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E un plan passant par l'origine

  $\Rightarrow$ Équation du plan : $ax + by + c = 0$



- un élément u de E est un triplet $(x ; y ; z)$ tel que : $ax + by + cz = 0$

  $\rightarrow$ Soient $u = (x ; y ; z)$ et $v = (x' ; y' ; z')$ deux éléments de E

  $\rightarrow$ $ax + by + cz = 0$ et $ax' + by' + cz' = 0$

$\Leftrightarrow a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') = 0$

Ainsi $u+v = (x+x' ; y+y' ; z+z') \in E$

On peut également vérifier, par exemple, les autres propriétés :

- l'élément neutre $(0;0;0) \in E$
- le symétrique est $-(x;y;z) \in E$

...

! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel car justement il ne contient pas le vecteur nul $(0;0;0)$

B) Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel.

$\Leftrightarrow$ On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble de E qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies dans E.

On remarque qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\alpha \cdot u + \beta v \in F$ quels que soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

* Remarques :

a) Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E forme un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que :

i) $u+v \in F$ pour tous $u, v \in F$;

ii) $\lambda \cdot u \in F$ pour tous $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

b) C'est une condition nécessaire, mais non suffisante, qu'un sous-ensemble F de E contient le vecteur nul pour être un sous-espace vectoriel de E.

* Exemple 1 :

$F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

=> Il faut montrer que :

i) $(0;0) \in F$ -> OK

ii) Soient $u = (x_1;y_1)$ et $v = (x_2;y_2)$ appartiennent à F

alors : $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$

et ainsi $u + v = (x_1 + y_1 ; x_2 + y_2) \in F$

iii) Soient $u = (x;y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $x+y=0$ => $\lambda x + \lambda y = 0$ => d'où $\lambda u \in F$

=> F est un sous-espace vectoriel.

* Exemple 2 :

- $F_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

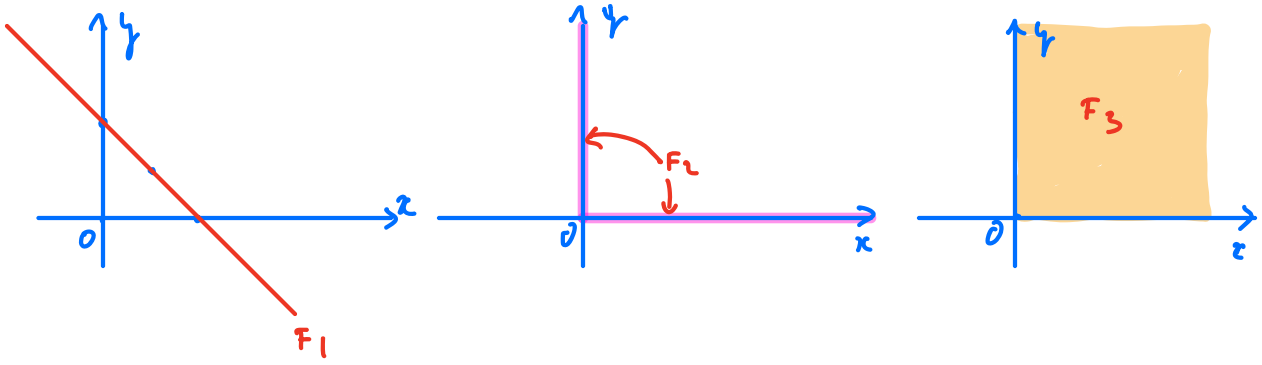
En effet le vecteur nul $(0;0)$ n'appartient pas à F_1

- $F_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ ou } y=0\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

En effet $u = (1;0)$ et $v = (0;1) \in F_2$ mais $u+v = (1;1)$ n'appartient pas à F_2

- $F_3 = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

En effet, $u = (1;1) \in F_3$ mais pour $\lambda = -1$ $\lambda u = (-1;-1) \notin F_3$



* Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Méthodologie : " L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? "

→ Trouver un espace vectoriel E qui contient F

→ prouver que F est un sous-espace vectoriel de E

→ il y a seulement 3 propriétés à vérifier au lieu de 8.

* Somme de deux sous-espaces vectoriels :

- La somme de deux sous-espace vectoriels A et B de E, est le sous-ensemble, noté $A+B$, défini par : $A+B = \{ u+v \mid u \in A, v \in B \}$
- L'intersection $A \cap B$ de deux sous-espace vectoriels A et B est un sous-espace vectoriel.
- La somme $A+B$ est dite directe si $A \cap B = \{0\}$. Dans le cas d'une somme directe, on note $A \oplus B$.

↑ vecteur nul

* **Théorème :**

La somme de deux sous-espaces vectoriels $A + B$ est un sous-espace vectoriel de E.

* **Théorème :** Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Si $V = A \oplus B$, alors pour tout vecteur $v \in V$, il existe un unique $a \in A$ et un unique $b \in B$ tel que : $v = a + b$

* A et B sont en somme directe dans E si

  - $A \cap B = \{0\}$
  - $A + B = E$

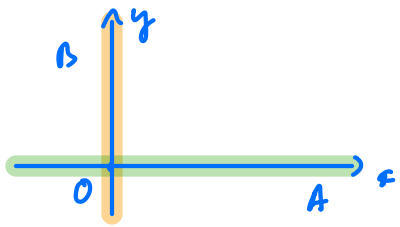
  $\Rightarrow$ on note $A \oplus B = E$

A et B sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

* **Exemple :**

$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

$A \oplus B = \mathbb{R}^2$



Vérifier 2 axiomes :

- $A \cap B \overset{?}{=} \{0\}$

  $A \cap B = \{(0,0)\}$ ✓

- $A + B = \mathbb{R}^2$ car $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

  $\Rightarrow A \oplus B = \mathbb{R}^2$

Autre méthode : la décomposition $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ est unique

- Garder A et noter $B' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'on a aussi $A \oplus B' = \mathbb{R}^2$

  → $A \cap B' = \{(0,0)\}$

  → $A + B' = \mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x-y, 0) + (y,y)$

- Deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

* <u>Existence d'un sous-espace supplémentaire :</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel A de E, il existe un sous-espace vectoriel B de E (non unique) tel que :

$$E = A \oplus B$$

On dit que B est un sous-espace supplémentaire de A dans E.