Exponentielles et logarithmes

4.2.11 Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log(-x^2 + 4\,x + 22)$

b) $f(x) = 12 - 10^{3-x}$

c) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2\,x}{x-1}\right)$

a) $f(x) = \log\left(-x^2 + 4x + 22\right)$

* condition : $-x^2 + 4x + 22 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 22 < 0$

$\Delta = 104$

$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{26}}{2} = 2 \pm \sqrt{26}$

$\Rightarrow D_f = \left]2 - \sqrt{26} ; 2 + \sqrt{26}\right[$

* chercher les zéros de $f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \log\left(-x^2 + 4x + 22\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log\left(-x^2 + 4x + 22\right) = \log(1)$

$\Rightarrow -x^2 + 4x + 22 = 1 \Rightarrow (x-7)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3$ et $x_2 = 7$

* Tableau des signes :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{26}$		-3		7		$2+\sqrt{26}$		$+\infty$
$f(x)$		//		−	0	+	0	−		//	

b) $f(x) = 12 - 10^{3-x}$

* $ED(f) = \mathbb{R}$

* Zéro :

$12 - 10^{3-x} = 0 \iff 10^{3-x} = 12 \iff \log(12) = 3-x$

$\iff x = 3 - \log(12)$

* Tableau des signes :

x	$-\infty$		$3-\log(12)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	

c) $f(x) = \log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

* Condition : $\frac{2x}{x-1} > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

* Zéro :

$\log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right) = 0$

$\rightarrow \frac{2x}{x-1} = 1$

$\Rightarrow \quad 2x = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

* Tableau des signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	‖	‖	$+$	