

Exercice 1.3.5

Soit l'équation $3z^3 + 2z^2 + 7z - 20 = 0$

a) Vérifier que le nombre complexe $u = -1 + 2i$ est solution de l'équation ci-dessus.

Si $u = -1 + 2i$ est la solution alors :

$$\Rightarrow 3(-1 + 2i)^3 + 2(-1 + 2i)^2 + 7(-1 + 2i) - 20 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow 3(\underbrace{-1 + 2i}^2)(-1 + 2i) + 2(-1 + 2i)^2 + 7(-1 + 2i) - 20 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow 3(-3 - 4i)(-1 + 2i) + 2(-3 - 4i) + 7(-1 + 2i) - 20 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cancel{33} - \cancel{6i} - \cancel{6} - \cancel{8i} - \cancel{7} + \cancel{14i} - \cancel{20} = 0 \quad \checkmark$$

Donc $u = -1 + 2i$ est solution.

b) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

On a $u = -1 + 2i$ est solution $\Rightarrow \bar{u} = -1 - 2i$ l'est aussi.

$$\Rightarrow (z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i)) = z^2 + 2z + 5$$

$$\begin{array}{r|l} \text{Division :} & \begin{array}{r} z^2 + 2z + 5 \\ 3z - 4 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} 3z^3 + 2z^2 + 7z - 20 \\ - (3z^2 + 6z^2 + 15z) \\ \hline -4z^2 - 8z - 20 \\ - (-4z^2 - 12z - 20) \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow 3z^3 + 2z^2 + 7z - 20 = [z - (-1 + 2i)][z - (-1 - 2i)](3z - 4)$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -1 + 2i ; -1 - 2i ; \frac{4}{3} \right\}$$

c) En déduire une factorisation du polynôme

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x - 20$$

dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

$$\underline{P(x) = (3x - 4)(x^2 + 2x + 5)}$$