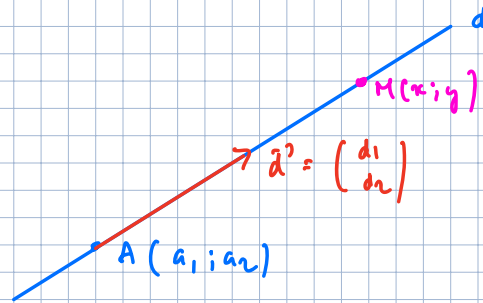


Géométrie vectorielle

1) La droite dans le plan



$A(a_1; a_2)$ un point $\in d$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de d

$$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + k \vec{d}, k \in \mathbb{R}$$

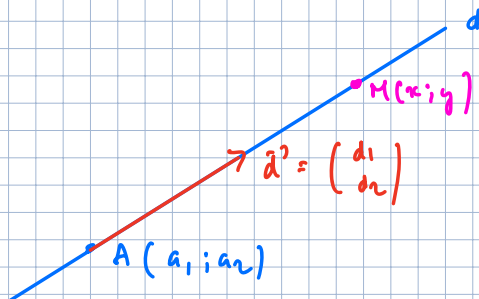
a) Équations paramétriques vectorielles :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a_1 + k d_1 \\ y = a_2 + k d_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{ système d'équations paramétriques}$$

* Si la droite est donnée par deux points A et B , on prend le vecteur $\vec{AB}$ comme vecteur directeur.

b) Équation cartésienne de la droite dans le plan :



pour tout point $M(x; y)$ du plan, les conditions suivantes sont équivalentes :

- Le point M appartient à la droite d
- Les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires
- $\begin{vmatrix} x-a_1 & d_1 \\ y-a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0$

$$c \text{ à } d: d_2(x-a_1) - d_1(y-a_2) = 0$$

$$\Rightarrow d_2(x-a_1) = d_1(y-a_2)$$

$$\bullet \text{ avec } a = d_2, b = -d_1 \text{ et } c = d_1a_2 - d_2a_1$$

$$\Rightarrow ax + by + c = 0$$

Cette expression s'appelle l'équation cartésienne de la droite d .

* Autre forme de l'équation cartésienne :

Supposons que $d_1 \neq 0$, en d'autres termes, que la droite d n'est pas verticale.

En divisant par d_1 l'équation $d_2(x-a_1) = d_1(y-a_2)$, on obtient :

$$y = \frac{d_2}{d_1}x + a_2 - \frac{d_2}{d_1}a_1, \text{ c-à-d : } y = mx + h$$

$= m: \text{pente}$
 $= h: \text{ordonnée à l'origine}$

c) Les 4 démarches pour déterminer les équations cartésiennes d'une droite :

- i) Type point - pente
- i) Type point - point
- ii) Type point - vecteur directeur
- iii) Type point - vecteur normal

! $x = c \Rightarrow$ droite verticale

$y = c \Rightarrow$ droite horizontale

d) Transformation entre équation paramétrique et équation cartésienne :

- Équation paramétrique $\rightarrow$ équation cartésienne
- Équation cartésienne $\rightarrow$ équation paramétrique.

c) position relative de deux droites :

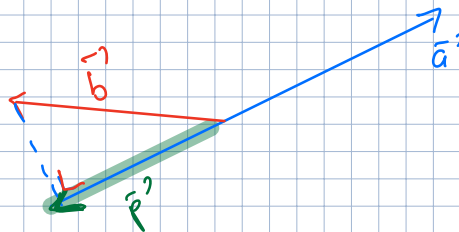
- si d_1 et d_2 ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$.

On a :

- * $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ non colinéaires $(\Rightarrow)$ d et d' sont sécantes
 $(\Rightarrow) m_d \neq m_{d'}$
- * $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ colinéaires $(\Rightarrow)$ d et d' ont la même direction
 $(\Rightarrow) m_d = m_{d'} (//)$

- si d_1 et d_2 ont la même direction, pour savoir si les droites sont **strictement parallèles** ou **confondues**, il suffit de vérifier si un point quelconque de l'une des droites se trouve sur l'autre droite.

c) projection orthogonale $\vec{p}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$:



$$\vec{p}' = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{b}'}{\|\vec{a}'\|^2} \cdot \vec{a}'$$

et la longueur de la projection orthogonale $\vec{p}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$:

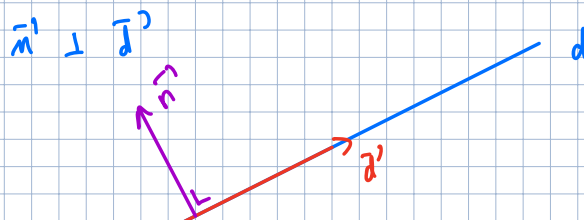
$$\|\vec{p}'\| = \frac{|\vec{a}' \cdot \vec{b}'|}{\|\vec{a}'\|}$$

2) La droite dans le plan métrique :

a) Vecteur normal :

* Définition :

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{d}$. On définit le vecteur normal de d par un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{d}$ et non nul.



* Propriétés :

i) Si $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{n} = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$

En effet : $\vec{d} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} = -d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$
($\Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n}$)

ii) Si $d : ax + by + c = 0$ alors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

En effet : $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -(-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

iii) Deux droites d et d' sont orthogonales

($\Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{d}' = 0$) (par définition)

($\Rightarrow m_d \cdot m_{d'} = -1$)

En effet : $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}' = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_d = \frac{d_2}{d_1}$ et $m_{d'} = -\frac{d_1}{d_2}$

$\Rightarrow m_d \cdot m_{d'} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \left(-\frac{d_1}{d_2}\right) = -1$

b) Droites perpendiculaires :

Droite d_1 : $\vec{d}_1$ et m_1

Droite d_2 : $\vec{d}_2$ et m_2

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0 \text{ ou } m_1 \cdot m_2 = -1$$

-> Conséquences :

i) Si d_1 et d_2 sont perpendiculaires, $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont des vecteurs orthogonaux (de direction perpendiculaires)

ii) La pente m' d'une perpendiculaire à une droite de pente m vaut :

$$m' = -\frac{1}{m}$$

c) Vecteur normal à une droite :

Tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de la droite est appelé un vecteur normal à la droite.

i) Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite $ax + by + c = 0$

ii) Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ est normal à la droite $\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{cases}$
 $k \in \mathbb{R}$

d) Équation d'une droite perpendiculaire à la droite $ax + by + c = 0$:

$$(d) : ax + by + c = 0$$

$$d \perp d' \Rightarrow (d') : bx - ay + c = 0$$

$$\text{si } d \parallel d' \Rightarrow (d') : ax + by + c' = 0$$

e) Equation normale d'une droite :

L'équation normale d'une droite nous permettra de calculer la distance d'un point à une droite ainsi que d'établir les équations cartésiennes des bissectrices d'une paire de droites données.

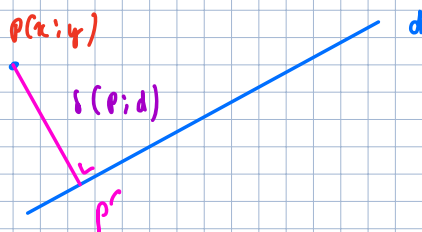
* Définition :

L'équation normale d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est définie par :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

f) Distance d'un point à une droite :

La distance du point P à la droite d est notée $\delta(P; d)$. Elle est égale à la norme du vecteur $\vec{PP'}$, où P' est la projection orthogonale de P sur d .



$$\delta(P; d) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

g) Bissection de deux droites :

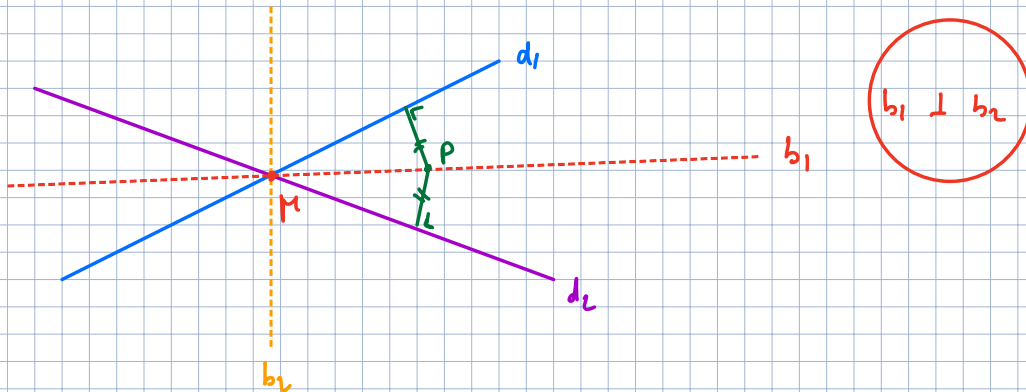
Les bissectrices de deux droites sont le lieu géométrique des points équidistants de ces droites. Étant donné un point $P(x; y)$ et deux droites

$(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, les conditions suivantes sont donc équivalentes :

- P appartient à l'une des bissectrices de d_1 et d_2
- $\delta(P; d_1) = \delta(P; d_2)$

$$\text{iii) } \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{analytique} \end{array}$$

Cette dernière formule détermine les équations des bissectrices de deux droites d_1 et d_2 .



* preuve :

$$\text{Soit } P(x; y) \in b_1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta(M; d_1) = \delta(M; d_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (\text{c.q.f.d.})$$

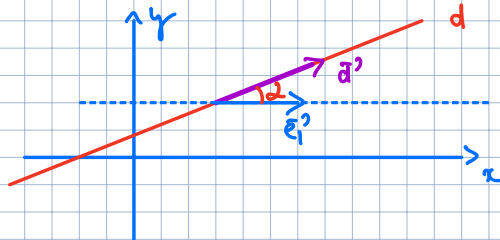
* Méthode vectorielle :

Soient d_1 et d_2 deux droites qui se coupent en un point M .
Si les vecteurs directeurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ des droites d_1 et d_2 sont de même norme, alors les vecteurs directeurs des bissectrices sont donnés par :

$$\vec{b}_1 = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \quad \text{et} \quad \vec{b}_2 = \vec{d}_1 - \vec{d}_2$$

k) Angle de deux droites :

* on appelle angle directeur d'une droite d tout angle entre $\vec{e}_1^d$ et un vecteur directeur $\vec{d}^d$ de d .



* Soient deux droites d_1 et d_2 de pentes respectives m_1 et m_2

=> L'angle φ entre les deux droites sera donné par :

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

! Cette formule ne s'applique pas si l'une des droites est verticale ou si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires (on a alors $1 + m_1 m_2 = 0$)

* Le produit scalaire permet de déterminer l'angle φ entre les droites d_1 et d_2 à partir de leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{d}_1^d$ et $\vec{d}_2^d$ ou à partir de leurs vecteurs normaux respectifs $\vec{m}_1^d$ et $\vec{m}_2^d$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{d}_1^d \cdot \vec{d}_2^d}{\|\vec{d}_1^d\| \cdot \|\vec{d}_2^d\|} = \frac{\vec{m}_1^d \cdot \vec{m}_2^d}{\|\vec{m}_1^d\| \cdot \|\vec{m}_2^d\|}$$