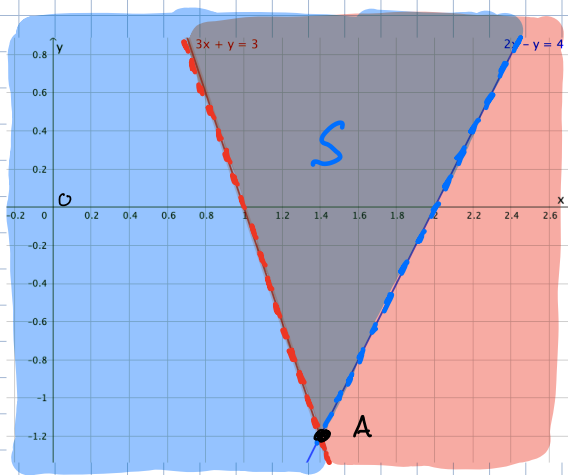


Exercice 3 :

Déterminer les sommets des polygones de solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 2.

a)



Le sommet est l'intersection entre deux droites :

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

=> il faut résoudre ce système pour trouver le point d'intersection.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 & (1) \\ 2x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 3x + 2x + y - y = 3 + 4 \\ &\Rightarrow 5x &= 7 \quad | \div 5 \\ &x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

On remplace $x = \frac{7}{5}$ dans (1)

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{7}{5} + y = 5$$

$$\Rightarrow \frac{21}{5} + y = 5 \quad | \cdot (5)$$

$$\Rightarrow 21 + 5y = 15 \quad | - 21$$

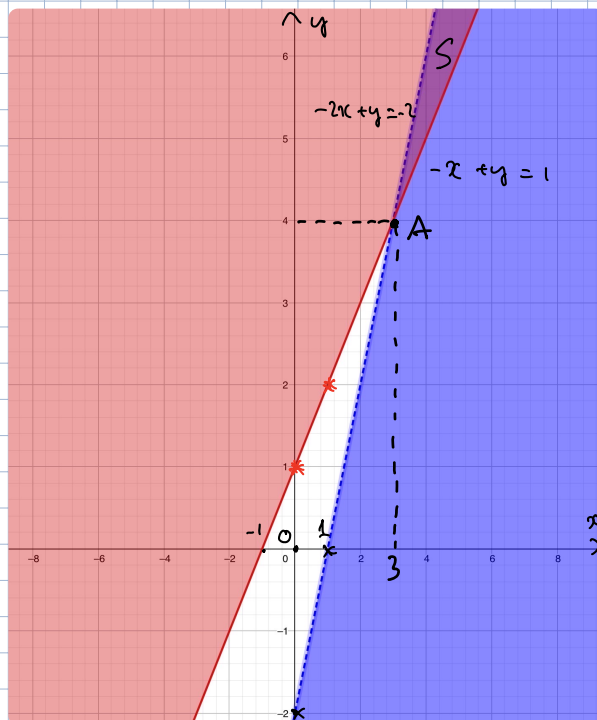
$$\Rightarrow 5y = 15 - 21$$

$$\Rightarrow 5y = -6 \quad | \div (5)$$

$$y = -\frac{6}{5}$$

donc le sommet $A \left(\frac{7}{5} ; -\frac{6}{5} \right)$

b)



le sommet A peut être
déterminer directement sur
le graphique

$A (3; 4)$

*Vérification:

le sommet A est l'intersection
entre $-2x + y = -2$ et

$$-x + y = 1$$

$\Rightarrow$ il faut résoudre le
système :

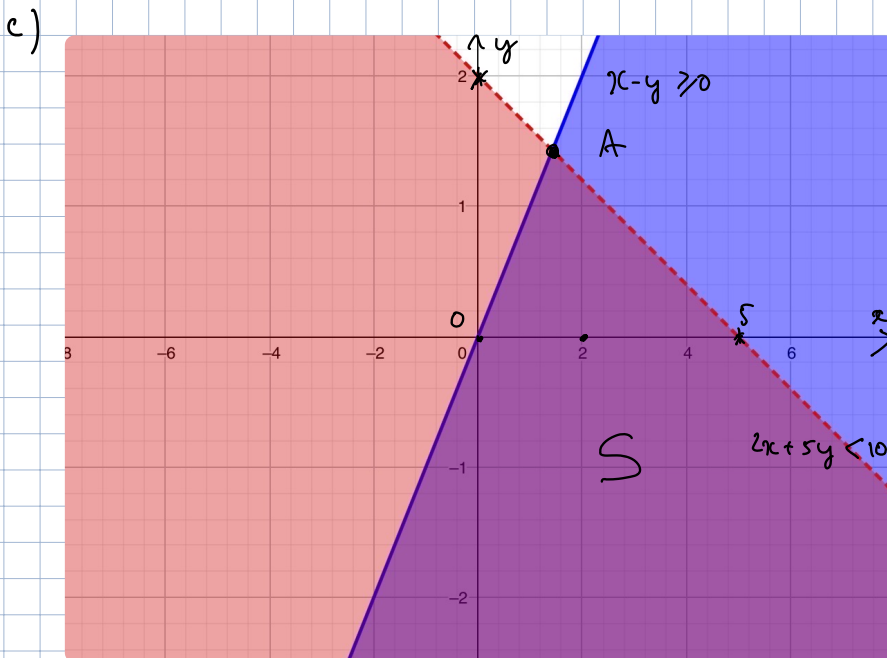
$$\begin{cases} -2x + y = -2 & (1) \\ -x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (1) - (2) &= 1 & -2x - (-x) + y - y &= -2 - 1 \\
 &= 1 & -2x + x &= -3 \\
 &= 1 & -x &= -3 \quad | \cdot (-1) \\
 &= 1 & x &= 3
 \end{aligned}$$

Remplacer $x = 3$ dans (2) :

$$\begin{aligned}
 -3 + y &= 1 \quad | + 3 \\
 y &= 4
 \end{aligned}$$

Donc $A(3; 4)$



Le sommet A est l'intersection entre $x - y = 0$ et $2x + 5y = 10$
 ⇒ il faut résoudre :
$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2x + 5y = 10 & (2) \end{cases}$$

Par substitution : (1) ⇒ $x = y$

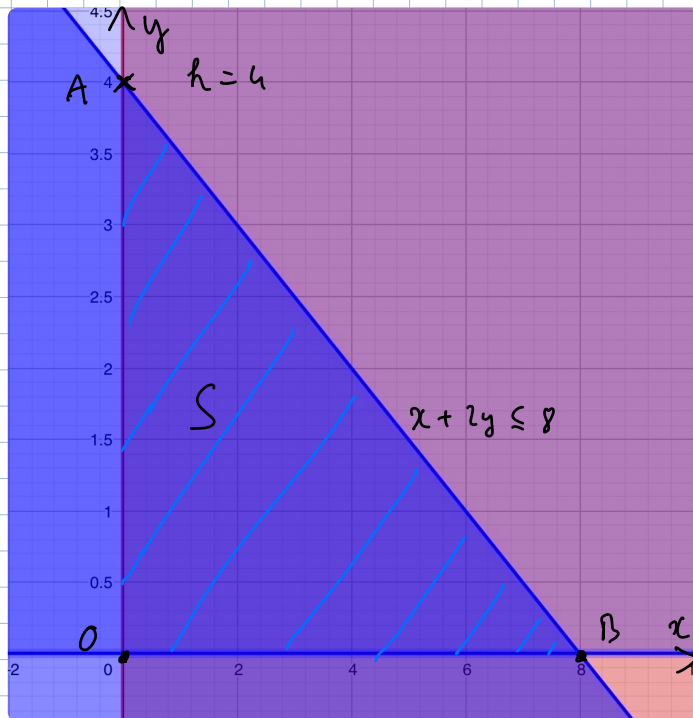
Remplacer $x = y$ dans (2)

$$\begin{array}{rcl}
 2y + 5y & = & 10 \\
 7y & = & 10 \quad | \quad \div 7 \\
 y & = & \frac{10}{7}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

donc $A \left(\frac{10}{7} ; \frac{10}{7} \right)$

d)



3 sommets O ; A et

B

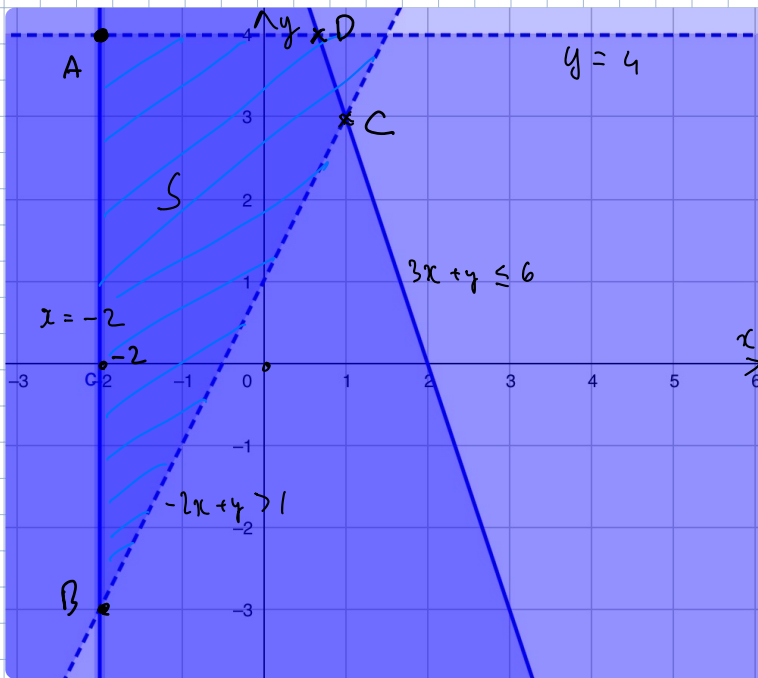
$\Rightarrow$ on peut les déterminer directement sur le graphique.

Donc $O(0;0)$

$A(0;4)$

et $B(8;0)$

e)



4 sommets : A, B, C et D

=> A (-2 ; 4)

B (-2 ; -3)

C (1 ; 3)

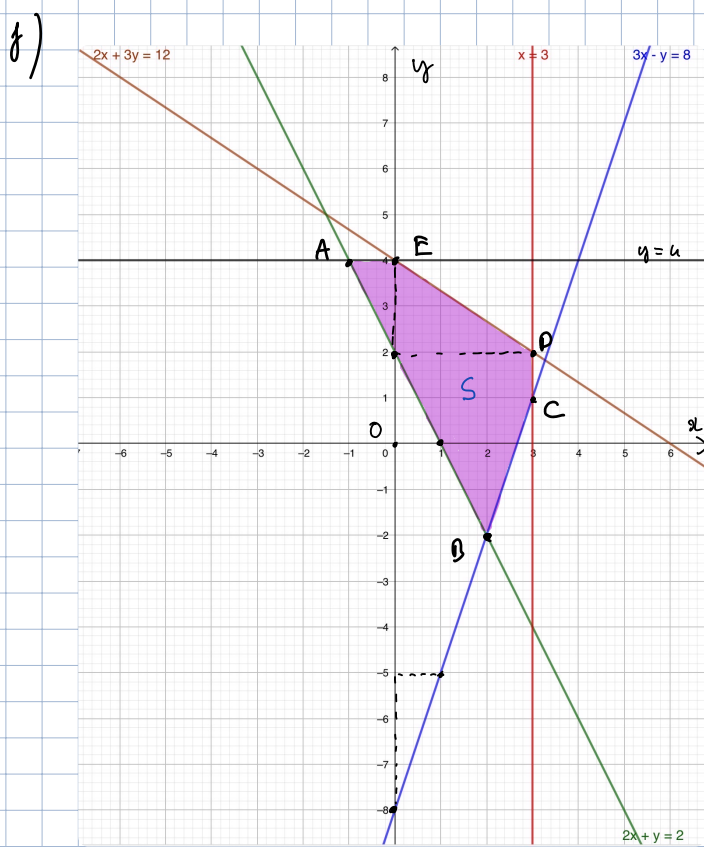
le sommet D est l'intersection entre $3x + y = 6$ et $y = 4$

$$= \begin{cases} 3x + y = 6 & (1) \\ y = 4 & (2) \end{cases}$$

Remplacer $y = 4$ dans (1)

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4 & = & 6 \\ 3x & = & 2 \\ x & = & \frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} - 4 \\ \div (3) \end{array}$$

Donc D ($\frac{2}{3}$; 4)



5 sommets : A, B, C, D et E

avec A (-1 ; 4)

B (2 ; -2)

C (3 ; 1)

D (3 ; 2)

E (0 ; 4)

Directement sur le graphe !

! On peut déterminer ces sommets en résolvant les systèmes d'équations

par exemple : le sommet A :
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

le système B :

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

le système C :

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

le système D :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = 3 \end{cases}$$

le système E :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Exercice 4 :

On considère la fonction : $f(x; y) = 3x + 4y$

a) $A (0; 0)$

$$\Rightarrow f(0; 0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

$B (0; 3)$

$$\Rightarrow f(0; 3) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12$$

$C (4; 3)$

$$\Rightarrow f(4; 3) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$$

$D (4; 6)$

$$\Rightarrow f(4; 6) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 36$$

$E_1 (0; 12)$

$$\Rightarrow f(0; 12) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 12 = 48$$

$E_2 (4; 9)$

$$\Rightarrow f(4; 9) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 9 = 48$$

$E_3 (8; 6)$

$$\Rightarrow f(8; 6) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 48$$

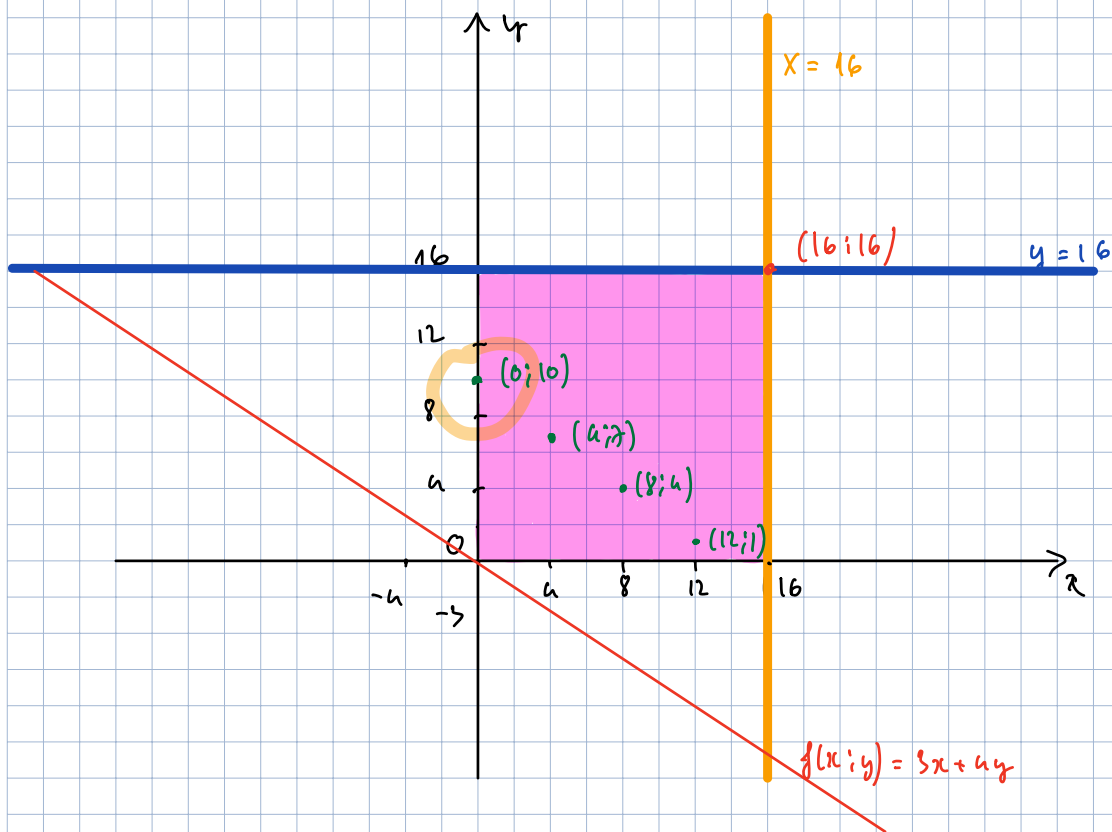
$E_4 (12; 3)$

$$\Rightarrow f(12; 3) = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 3 = 48$$

$E_5 (16; 0)$

$$\Rightarrow f(16; 0) = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 0 = 48$$

b) On a la fonction $f(x; y) = 3x + 4y$
 et les inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 16$ et $y \leq 16$



Le point dans ce carré qui maximise la fonction f est $(16; 16)$.

En effet :

$$f(16; 16) = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 112$$

c) $f(x; y) = 3x + 4y$

point $(0; 16)$: $f(0; 16) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 16 = 64$

point $(4; 8)$: $f(4; 8) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 40$

point $(8; 4)$: $f(8; 4) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 40$

point $(12; 1)$: $f(12; 1) = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 1 = 40$

Y a-t-il d'autres points qui réalisent cette condition ?

Oui

Si oui, lesquels ?

Tous les points du segment d'extrémités $(0; 10)$ et $(\frac{40}{3}; 0)$

Pourquoi $(\frac{40}{3}; 0)$?

On sait que $f(x; y) = 40$

dans le carré : $y = 0$

$$\Rightarrow f(x; 0) = 3x + 4 \cdot 0 = 40$$

$$\Rightarrow 3x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{3}$$

d) Domaine délimité par

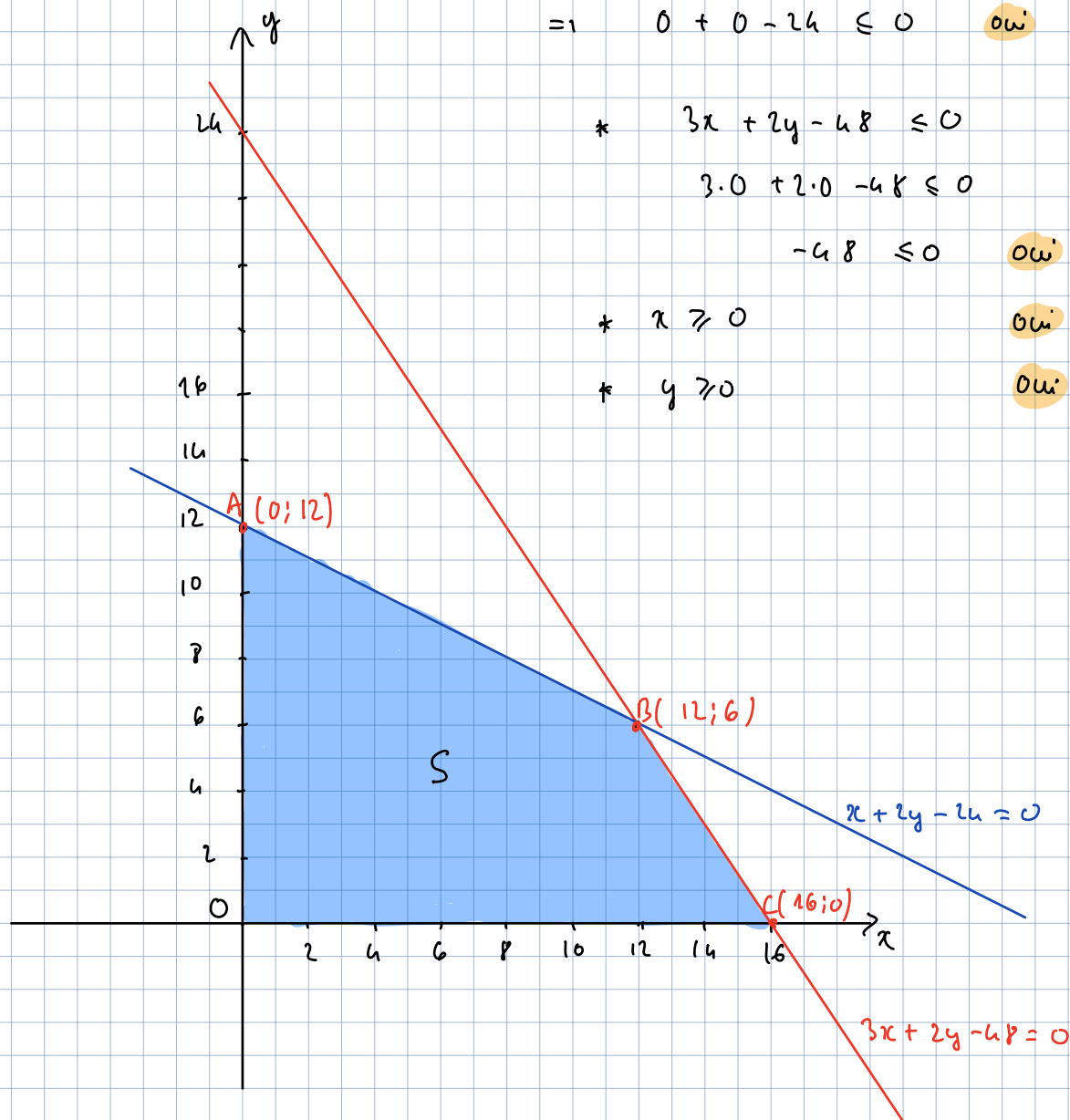
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y - 24 = 0 \\ 3x + 2y - 48 = 0 \end{cases}$$

1) Tracer les 4 droites :

$$x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x + 2y - 24 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 2y - 48 = 0$$

2) Tester les zones avec $O(0; 0)$

$$* \quad x + 2y - 24 \leq 0$$



4 sommets du polygone de solutions

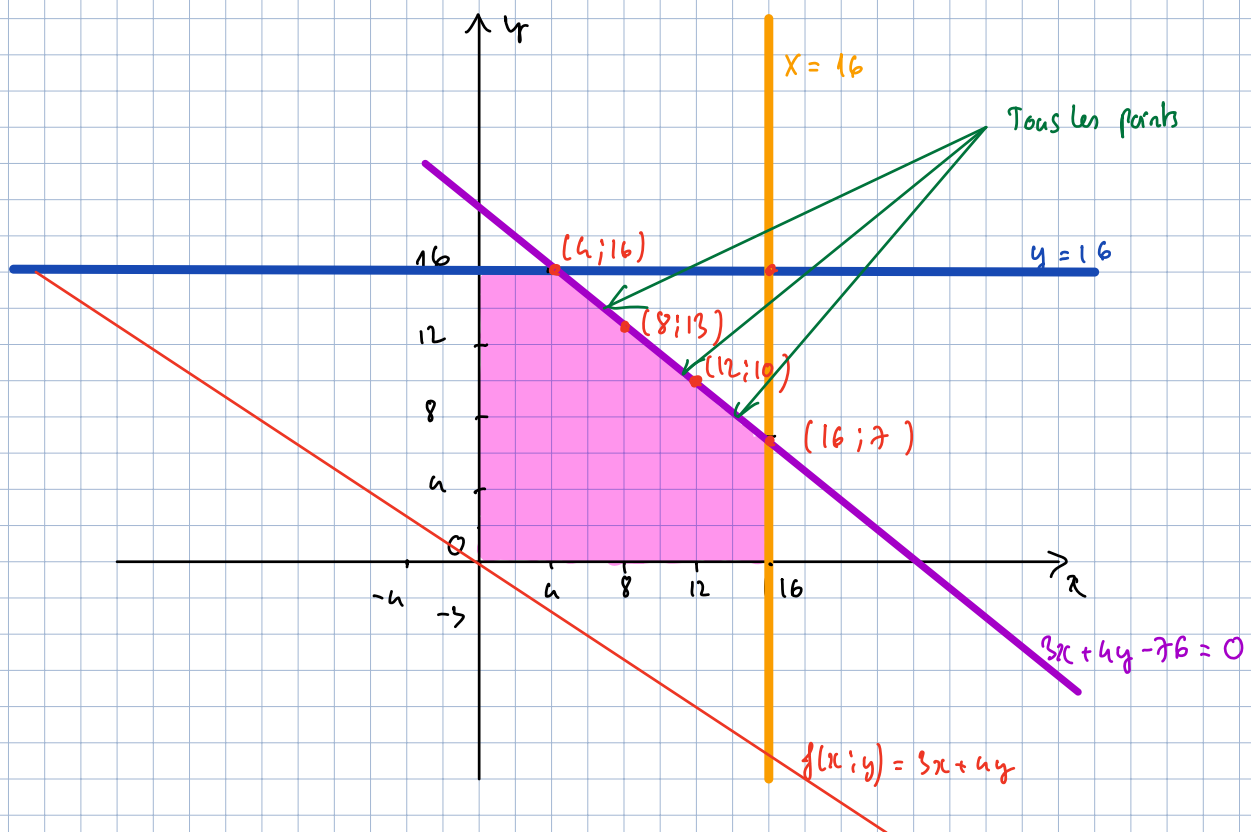
$O(0;0)$; $A(0;12)$; $B(12;6)$ et $C(16;0)$

$\Rightarrow$ le point $(12;6)$ maximise la fonction $f(x;y) = 3x + 4y$ car

$$f(12;6) = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 36 + 24 = 60$$

e) Domaine délimité par :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 16 \\ y \leq 16 \\ 3x + 4y - 76 \leq 0 \end{cases}$$



* 4 points, à coordonnées entières : À partir du graphe :

$(4;16)$; $(8;13)$; $(12;10)$ et $(16;7)$

* Tous les points du segment d'extrémités $(4;16)$ et $(16;7)$
maximisent la fonction f