CORRIGÉ

1.14 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210 m^2
Pin	5	2,5	180 m^2
Noyer	6	5	240 m^2

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF 1'000.- par armoire et CHF 900.- par table ?

b) il gagne CHF 1'200.- par armoire et CHF 1'000.- par table ?

On pose : x nombre d'armoires

y " de tables

$\Rightarrow$ système des contraintes :

$$\begin{cases} 4x + 5y \leq 210 \\ 5x + \frac{5}{2}y \leq 180 \\ 6x + 5y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) fonction objectif : $f(x;y) = 1000x + 900y \Rightarrow y = -\frac{10}{9}x$

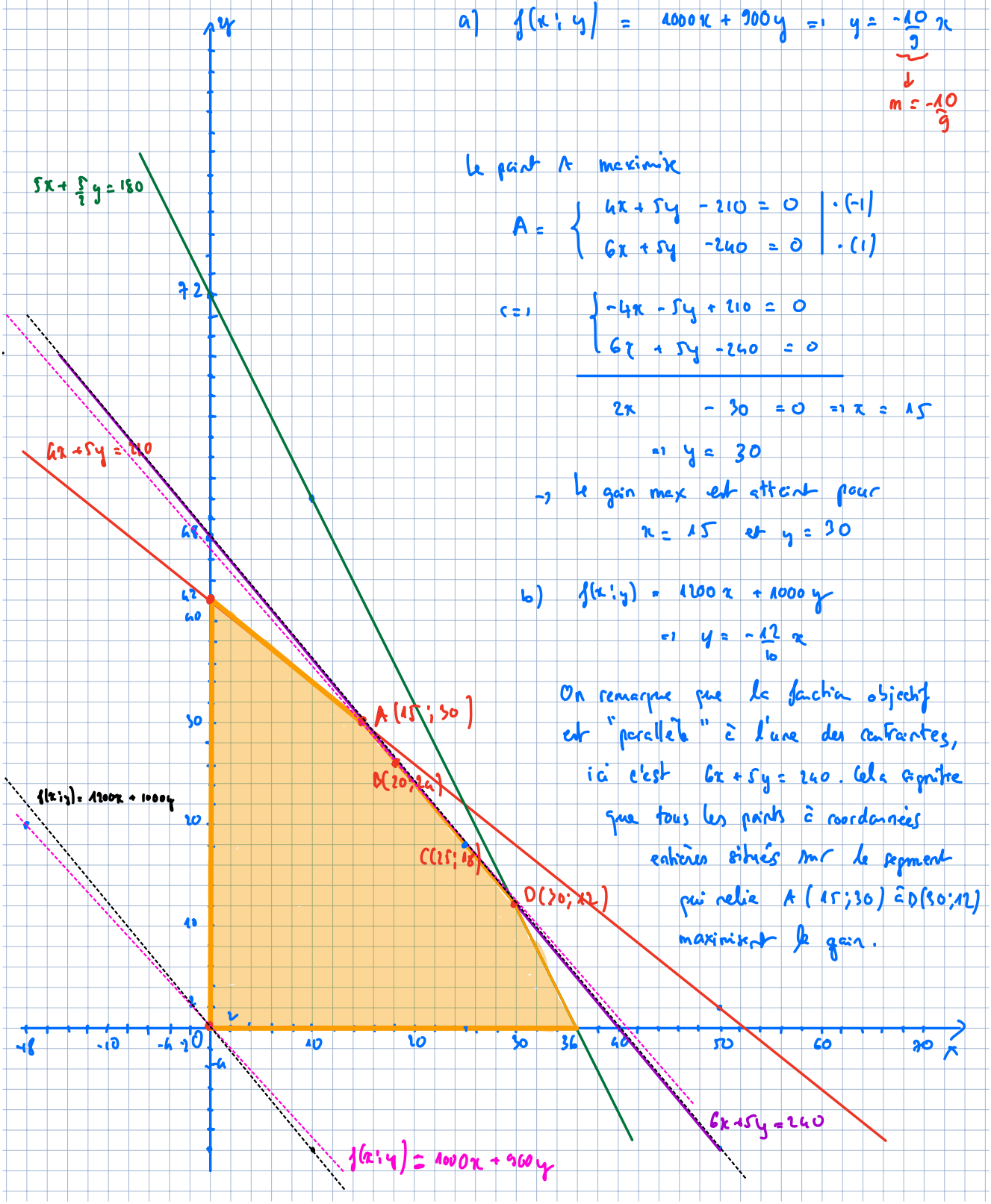
+ on trace les droites :

$$\begin{cases} 4x + 5y = 210 \\ 5x + \frac{5}{2}y = 180 \\ 6x + 5y = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{5}x + 42 \\ y = -2x + 72 \\ y = -\frac{6}{5}x + 48 \end{cases}$$

+ on teste avec $O(0;0)$:

$$\begin{cases} 4\cdot 0 + 5\cdot 0 \leq 210 & \text{oui} \\ 5\cdot 0 + \frac{5}{2}\cdot 0 \leq 180 & \text{oui} \\ 6\cdot 0 + 5\cdot 0 \leq 240 & \text{oui} \end{cases}$$

* Polygone des contraintes :



a) $f(x;y) = 1000x + 900y \Leftrightarrow y = \underbrace{-\frac{10}{9}}_{\downarrow\ m = -\frac{10}{9}} x$

Le point A maximise

$$A = \begin{cases} 4x + 5y - 210 = 0 & | \cdot(-1) \\ 6x + 5y - 240 = 0 & | \cdot(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 5y + 210 = 0 \\ 6x + 5y - 240 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

$$\Leftrightarrow y = 30$$

$\rightarrow$ Le gain max est atteint pour $x = 15$ et $y = 30$

b) $f(x;y) = 1200x + 1000y$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{12}{10} x$$

On remarque que la fonction objectif est "parallèle" à l'une des contraintes, ici c'est $6x + 5y = 240$. Cela signifie que tous les points à coordonnées entières situés sur le segment qui relie A(15;30) à D(30;12) maximisent le gain.