Corrigé

Fonctions quadratiques

2.1 Soit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - 4x - 16 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -0{,}5x^2 - x + 1{,}5 \end{array}$$

A l'aide d'un tableau de valeurs, de -5 à 5, tracer le graphique de chacune de ces deux fonctions.

2.2 Déterminer, si elles existent, les intersections entre le graphe de chacune des fonctions et les axes de coordonnées.

a) $a(x) = x^2 + 12x + 35$

b) $b(x) = 12x^2 - 60x + 75$

c) $c(x) = -x^2 - 3 + 2x$

d) $d(x) = 10x^2 + 31x - 14$

e) $e(x) = x^2 + 6x + 9$

f) $f(x) = 25x - 25 - 6x^2$

g) $g(x) = 7x^2 - 252$

h) $h(x) = 7x^2 + 252$

a) $a(x) = x^2 + 12x + 35$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow \boxed{H(0;35)}$
- Intersection avec Ox : $a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 35 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 = 144 - 140 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \frac{-12-2}{2} = -7 \rightarrow \boxed{I_1(-7;0)}$

$x_2 = \frac{-12+2}{2} = -5 \rightarrow \boxed{I_2(-5;0)}$

b) $b(x) = 12x^2 - 60x + 75$

- Intersection avec Oy : $\boxed{H(0;75)}$
- Intersection avec Ox : $b(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 60x + 75 = 0 \mid :3$

$4x^2 - 20x + 25 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4(25) = 400 - 400 = 0$

$\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{I(2,5;0)}$

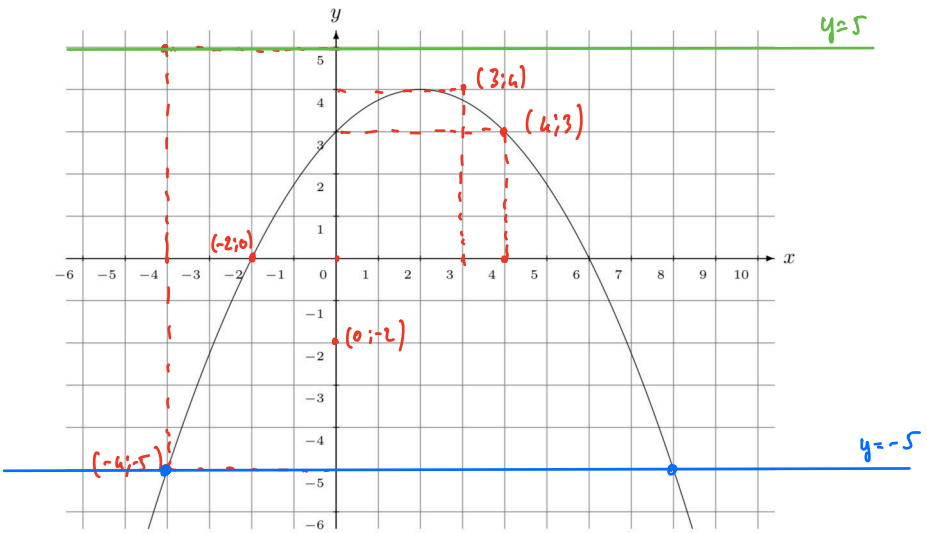
c) $c(x) = -x^2 - 3 + 2x \quad$ ou $\quad c(x) = -x^2 + 2x - 3$

- Intersection avec Oy : $\boxed{H(0;-3)}$
- Intersection avec Ox : $c(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-1)(-3) < 0$ pas de zéro

$\rightarrow$ pas de point d'intersection

2.3 Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

i) $(4,3)$ ✓
ii) $(3,4)$ ✗
iii) $(-4,5)$ ✗
iv) $(-4,-5)$ ✓
v) $(-2,0)$ ✓
vi) $(0,-2)$ ✗

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

i) $(4,..3..)$
ii) $(-4,..-5..)$
iii) $(0,..3..)$
iv) $(..2..,0)$ ou $(6,0)$
v) $(..2..,4)$
vi) $(.....,5)$ impossible

c) Donner les images.

i) $f(4) = 3$ ii) $f(-4) = -5$ iii) $f(0) = 3$ iv) $f(-2) = 0$ v) $f(8) = -5$

d) Résoudre les équations.

i) $f(x) = -5$
ii) $f(x) = 5$
iii) $f(x) = 0$ $\Rightarrow S = \{-2;6\}$
iv) $f(x) = 3$ $\Rightarrow S = \{0;4\}$
v) $f(x) = 4$ $\Rightarrow S = \{2\}$
vi) $f(x) = 7$ $\Rightarrow S = \emptyset$

$f(x) = -5 \rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = 8 \Rightarrow S = \{-4;8\}$
$f(x) = 5 \rightarrow S = \emptyset$

2.4 Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^2 + 2x - 15$.

a) Calculer.

i) $f(1)$
ii) $f(2)$
iii) $f(-3)$
iv) $f(0)$
v) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
vi) $f\left(-\frac{7}{3}\right)$

b) Résoudre les équations.

i) $f(x) = 20$
ii) $f(x) = -7$
iii) $f(x) = -16$
iv) $f(x) = 0$
v) $f(x) = 5$
vi) $f(x) = -20$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

i) $(-12,1)$
ii) $(1,-12)$
iii) $(12,-1)$
iv) $(-4,-39)$
v) $(-4,-7)$
vi) $(0,-5)$
vii) $(-5,0)$
viii) $(0,0)$
ix) $\left(\frac{1}{2},-\frac{55}{4}\right)$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

i) $(1,\ldots..)$
ii) $(2,\ldots..)$
iii) $\left(\frac{1}{2},\ldots..\right)$
iv) $(5,\ldots..)$
v) $(-11,\ldots..)$
vi) $(0,\ldots..)$
vii) $(\ldots..,0)$
viii) $(\ldots..,20)$
ix) $(\ldots..,-7)$
x) $(\ldots..,9)$
xi) $(\ldots..,-16)$

a) i) $f(1) = (1)^2 + 2\cdot 1 - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$

ii) $f(2) = (2)^2 + 2\cdot 2 - 15 = 4 + 4 - 15 = -7$

iii) $f(-3) = (-3)^2 + 2\cdot(-3) - 15 = 9 - 6 - 15 = -12$

iv) $f(0) = (0)^2 + 2\cdot 0 - 15 = -15$

v) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - 15 = \frac{1}{4} + 1 - 15 = \frac{1+4-60}{4} = -\frac{55}{4}$

vi) $f\left(-\frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{7}{3}\right) - 15 = \frac{49}{9} - \frac{14}{3} - 15 = \frac{49-42-135}{9}$

$= -\frac{128}{9}$

b) i) $f(x) = 20$

$x^2 + 2x - 15 = 20 \quad | \; -20$

$x^2 + 2x - 15 - 20 = 0 \quad | \; CL$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 140 = 144 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 12$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-2 - 12}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

$x_2 = \frac{-2 + 12}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\Rightarrow S = \{-7; 5\}$

ii) $f(x) = -7$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = -7 \quad | +7$

$x^2 + 2x - 15 + 7 = 0 \quad | CL$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

$x_1 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$

$\Rightarrow S = \{-4; 2\}$

iii) $f(x) = -16$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = -16 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 + 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$

iv) $f(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$

$\Rightarrow S = \{-5 ; 3\}$

v) $f(x) = 5$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 20 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 (-20) = 4 + 80 = 84$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{21}}{2} = \frac{2(-1-\sqrt{21})}{2} = -1 - \sqrt{21}$

$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{2} = \frac{2(-1+\sqrt{21})}{2} = -1 + \sqrt{21}$

$\Rightarrow S = \{-1 - \sqrt{21} ; -1 + \sqrt{21}\}$

vi) $f(x) = -20 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = -20 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -15 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

c) Les points appartenant au graphe de f s'ils satisfont l'égalité :

$f(x) = x^2 + 2x - 15$

i) $(-12 ; 1) \Rightarrow f(-12) \overset{?}{=} 1$

$\Rightarrow (-12)^2 + 2(-12) - 15 = 144 - 24 - 15 = 105 \neq 1$

$\Rightarrow (-12 ; 1)$ n'appartient pas au graphe de f.

ii) $(1 ; -12) \Rightarrow f(1) \overset{?}{=} -12$

$\Rightarrow (1)^2 + 2(1) - 15 = 1 + 2 - 15 = -12 = -12 \Rightarrow$ OUI

iii) $(12 ; -1)$ $\Rightarrow$ $f(12) \overset{?}{=} -1$

$\Rightarrow$ $(12)^2 + 2(12) - 15 = 144 + 24 - 15 = 153 \neq -1$ NON

d) coordonnées manquantes

i) $(1 ; \dots)$ $\Rightarrow$ pour trouver y, on remplace x dans $f(x) = y = x^2 + 2x - 15$

x y

$\Rightarrow$ $f(1) = y = 1^2 + 2 \cdot 1 - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$

$\Rightarrow$ $\boxed{(1 ; -12)}$

ii) $(2 ; \dots)$ $\Rightarrow$ $f(2) = y = 2^2 + 2 \cdot 2 - 15 = 4 + 4 - 15 = -7$

$\Rightarrow$ $\boxed{(2 ; -7)}$

vii) $(\dots ; 0)$ ici, on connait y $\Rightarrow$ il faut trouver x

$\Rightarrow$ $f(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow$ il suffit de résoudre cette équation : $x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 (-15) = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$

$\Rightarrow$ $x_1 = \dfrac{-2 - 8}{2} = -5$

$x_2 = \dfrac{-2 + 8}{2} = 3$

$\Rightarrow$ Il y a 2 points $\boxed{(-5 ; 0) \text{ ou } (3 ; 0)}$

viii) $(\dots ; 20)$ $\Rightarrow$ $f(x) = 20 \iff x^2 + 2x - 15 = 20$

$\Rightarrow$ $x^2 + 2x - 35 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) = 4 + 4 \cdot 35 = 144 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 12$

$x_1 = \dfrac{-2 - 12}{2} = -7$

$x_2 = \frac{-2+12}{2} = 5$

$\Rightarrow$ 2 points : $\boxed{(-7\,;\,20) \text{ ou } (5\,;\,20)}$

2.5 Déterminer les coordonnées du sommet, des intersections avec les axes de référence et discuter de la convexité du graphique des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x^2 + 12x + 11$

b) $b(x) = x^2 + 4x$

c) $c(x) = x^2 + x + 1$

d) $d(x) = x^2 - 0{,}2x - 0{,}24$

e) $e(x) = \frac{4x}{3} - x^2 - \frac{4}{9}$

f) $f(x) = 0{,}5 - 0{,}2x - 0{,}3x^2$

g) $g(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$

h) $h(x) = 0{,}25x^2 - x - 1{,}25$

i) $i(x) = \frac{4}{3}x - 1 - \frac{1}{2}x^2$

j) $j(x) = x^2 - 5$

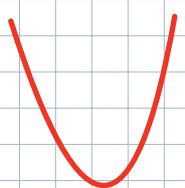
k) $k(x) = 7x^2 + 8x + 1$

l) $l(x) = 15x^2 + x - 2$

m) $m(x) = 20 + 8x - x^2$

Rappel : . Si le coefficient a est positif, alors la parabole est convexe

$f(x) = ax^2 + bx + c$



. Si le coefficient a est négatif, alors la parabole est concave



a) $a(x) = x^2 + 12x + 11$

ici $a = 1 > 0$ $\Rightarrow$ convexe

- Sommet : $S\left(-\frac{b}{2a} ; a\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2} = -6$ $\Rightarrow a(-6) = (-6)^2 + 12(-6) + 11$

$= 36 - 72 + 11 = -25$

$\Rightarrow$ $S(-6 ; -25)$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \Rightarrow \boxed{H(0;11)}$

- Intersection avec Ox : $\Rightarrow$ il faut résoudre $a(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 12x + 11 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 144 - 44 = 100 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-12-10}{2} = -11 \Rightarrow \boxed{Z_1(-11;0)}$

$x_2 = \frac{-12+10}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{Z_2(-1;0)}$

b) $b(x) = x^2 + 4x$

$a > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet $S\left(-\frac{b}{2a} ; b\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$

$\Rightarrow b(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4$

$\Rightarrow \boxed{S(-2;-4)}$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) = H(0;0)$

- Intersection avec Ox : $\Rightarrow b(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+4) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -4$

$X = 0 \Rightarrow \boxed{Z_1(0;0)}$, $X = -4 \Rightarrow \boxed{Z_2(-4;0)}$

c) $c(x) = x^2 + x + 1$

$a > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet $S\left(-\frac{b}{2a} ; c\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 2 + 4}{4}$

$= \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ **$S\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right)$**

- Intersection avec Oy : **$H(0 ; 1)$**
- Intersection avec Ox : $\Rightarrow c(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ pas d'intersection avec Ox

d) $d(x) = x^2 - 0{,}2x - 0{,}24$

$a > 0 \rightarrow$ convexe

- $S\left(-\frac{b}{2a} ; d\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = \frac{0{,}2}{2 \cdot 1} = 0{,}1 \rightarrow d(0{,}1) = (0{,}1)^2 - 0{,}2 \cdot (0{,}1) - 0{,}24$

$= 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}24 = -0{,}25$

$\rightarrow$ **$S(0{,}1 ; -0{,}25)$**

- Intersection avec Oy : $H(0;C) \Rightarrow \boxed{H(0;-0,24)}$

- Intersection avec Ox : $d(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - 0,2x - 0,24 = 0$

$\Delta = (-0,2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,24) = 0,04 + 0,96 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{0,2-1}{2 \cdot 1} = \dfrac{-0,8}{2} = -0,4 \rightarrow \boxed{Z_1(-0,4;0)}$

$x_2 = \dfrac{0,2+1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1,2}{2} = 0,6 \rightarrow \boxed{Z_2(0,6;0)}$

e) $e(x) = \frac{4}{3}x - x^2 - \frac{4}{9} \Rightarrow e(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$

$a < 0 \rightarrow$ concave

- $S\left(-\frac{b}{2a} ; e\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$-\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{2(-1)} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow e\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} = -\frac{4}{9} + \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = 0$

$\rightarrow \boxed{S\left(\frac{2}{3};0\right)}$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow \boxed{H\left(0;-\frac{4}{9}\right)}$

- Intersection avec Ox : $\Rightarrow e(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}=0$

$$\Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4(-1)\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{2(-1)} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow e\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = z_2 = S\left(\frac{2}{3};0\right)}$$

f) $f(x) = 0,5 - 0,2x - 0,3x^2 = -0,3x^2 - 0,2x + 0,5$

$a<0 \rightarrow$ concave

- Sommet : $-\frac{b}{2a} = \frac{0,2}{2(-0,3)} = \frac{0,2}{-0,6} = -\frac{1}{3}$

$$\rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -0,3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 0,2\left(-\frac{1}{3}\right) + 0,5 = -0,3\cdot\frac{1}{9} + \frac{0,2}{0,3} + 0,5$$

$$= -\frac{3}{90} + \frac{2}{30} + \frac{5}{10} = -\frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{5}{10}$$

$$= \frac{-1+2+15}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\rightarrow \boxed{S\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{15}\right)}$$

- Intersection avec O_y : $H(0;C) \rightarrow \boxed{H(0;0,5)}$

- Intersection avec O_x : $\rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,3x^2 - 0,2x + 0,5 = 0$

$\Delta = (-0,2)^2 - 4(-0,3) \cdot 0,5 = 0,04 + 0,6 = 0,64$

$\rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{0,64} = 0,8$

$\rightarrow x_1 = \dfrac{0,2 - 0,8}{2 \cdot (-0,3)} = \dfrac{-0,6}{-0,6} = 1 \rightarrow \boxed{Z_1(1;0)}$

$x_2 = \dfrac{0,2 + 0,8}{2 \cdot (-0,3)} = \dfrac{1}{-0,6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$

$\rightarrow \boxed{Z_2\left(-\dfrac{5}{3};0\right)}$

g) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 3$

$a = \dfrac{1}{3} > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet S : $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{3}{2} = 3$

$\rightarrow g(3) = \dfrac{(3)^2}{3} - 2 \cdot 3 + 3 = \dfrac{9}{3} - 6 + 3 = 3 - 6 + 3 = 0$

$\rightarrow \boxed{S(3;0)}$

- Intersection avec O_y : $H(0;C) \Rightarrow \boxed{H(0;3)}$

- Intersection avec Ox : $\Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0 \quad | \cdot 3$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{Z_1 = Z_2 (3;0)} = S$

h) $h(x) = 0{,}25x^2 - x - 1{,}25$

$0{,}25 > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}25} = 2$

$\rightarrow h(2) = 0{,}25(2)^2 - 2 - 1{,}25 = 1 - 2 - 1{,}25 = -2{,}25 = -\frac{9}{4}$

$\rightarrow \boxed{S\left(2 ; -\frac{9}{4}\right)}$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow \boxed{H(0;-1{,}25)}$

- Intersection avec Ox : $h(x) = 0 \Rightarrow 0{,}25x^2 - x - 1{,}25 = 0 \quad | \cdot 100$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 100x - 125 = 0 \quad | :25$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - 4x - 5 = 0}$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 (-5) = 16 + 20 = 36$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

$\rightarrow x_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \rightarrow \boxed{Z_1 (-1;0)}$

$x_2 = \frac{4+6}{2} = 5 \rightarrow \boxed{Z_2 (5;0)}$

i) $i(x) = \frac{4}{3}x - 1 - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

$-\frac{1}{2} < 0 \rightarrow$ concave

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{4}{3}}{-1} = \frac{4}{3}$

$\rightarrow i\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} - 1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} + \frac{16}{9} - 1$

$= -\frac{8}{9} + \frac{16}{9} - 1 = \frac{-8+16-9}{9} = -\frac{1}{9}$

$\rightarrow$ **$S\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{9}\right)$**

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow$ **$H(0;-1)$**

- Intersection avec Ox : $\rightarrow i(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 0 \quad | \cdot 6$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 8x - 6 = 0$

$\Delta = (8)^2 - 4(-3)(-6) = 64 - 72 = -8 < 0$

$\rightarrow$ **pas d'intersection avec Ox**

j) $j(x) = x^2 - 5 = x^2 - 0x - 5$

$a > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$

$\rightarrow j(0) = 0^2 - 0 - 5 = -5 \Rightarrow \boxed{S(0; -5)}$

- Intersection avec Oy : $H(0; C) \rightarrow \boxed{H(0; -5)}$

- Intersection avec Ox : $\rightarrow j(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$

$\rightarrow x_1 = -\sqrt{5}$ ou $x_2 = \sqrt{5}$

$X_1 = -\sqrt{5} \rightarrow \boxed{I_1(-\sqrt{5}; 0)}$

$x_2 = \sqrt{5} \rightarrow \boxed{I_2(\sqrt{5}; 0)}$

k) $k(x) = 7x^2 + 8x + 1$

$7 > 0 \rightarrow$ convexe

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 7} = -\frac{4}{7}$

$\rightarrow k\left(-\frac{4}{7}\right) = 7\left(-\frac{4}{7}\right)^2 + 8\left(-\frac{4}{7}\right) + 1 = \frac{16}{7} - \frac{32}{7} + 1$

$= \frac{16 - 32 + 7}{7} = -\frac{9}{7} \rightarrow \boxed{S\left(-\frac{4}{7}; -\frac{9}{7}\right)}$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow \boxed{H(0;1)}$

- Intersection avec Ox : $k(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 8x + 1 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = 64 - 28$

$\Delta = 36 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

$\rightarrow x_1 = \frac{-8-6}{14} = -1 \rightarrow \boxed{z_1(-1;0)}$

$x_2 = \frac{-8+6}{14} = -\frac{1}{7} \rightarrow \boxed{z_2\left(-\frac{1}{7};0\right)}$

l) $l(x) = 15x^2 + x - 2$

$15 > 0 \rightarrow$ convexe

- sommet S : $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 15} = -\frac{1}{30}$

$\rightarrow l\left(-\frac{1}{30}\right) = 15\left(-\frac{1}{30}\right)^2 - \frac{1}{30} - 2 = \frac{15}{900} - \frac{1}{30} - 2$

$= \frac{5}{300} - \frac{1}{30} - 2 = \frac{5 - 10 - 600}{300} = -\frac{605}{300} = -\frac{121}{60}$

$\rightarrow \boxed{H\left(-\frac{1}{10};-\frac{121}{60}\right)}$

- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow \boxed{H(0;-2)}$

- Intersection avec Ox : $\rightarrow l(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 15 (-2) = 1 + 120 = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$\rightarrow x_1 = \frac{-1 - 11}{2 \cdot 15} = \frac{-12}{30} = -\frac{2}{5} \rightarrow \boxed{I_1 \left(-\frac{2}{5} ; 0 \right)}$

$\rightarrow x_2 = \frac{-1 + 11}{2 \cdot 15} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{I_2 \left(\frac{1}{3} ; 0 \right)}$

m) $m(x) = 20 + 8x - x^2 = -x^2 + 8x + 20$

$a < 0 \rightarrow$ concave

- sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$

$\rightarrow m(4) = -(4)^2 + 8 \cdot 4 + 20 = -16 + 32 + 20 = 36$

$\rightarrow \boxed{S (4 ; 36)}$

- Intersection avec Oy : $H(0 ; C) \rightarrow \boxed{H(0 ; 20)}$

- Intersection avec Ox : $\rightarrow m(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 20 = 0$

$\rightarrow \Delta = 64 - 4(-1) \cdot 20 = 64 + 80 = 144 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 12$

$\rightarrow x_1 = \frac{-8 - 12}{-2} = 10 \rightarrow \boxed{I_1 (10 ; 0)}$

$\rightarrow x_2 = \frac{-8 + 12}{-2} = -2 \rightarrow \boxed{I_2 (-2 ; 0)}$

2.6 Tracer le graphe de chacune des fonctions en vous aidant des étapes suivantes :

1) — Convexe/concave

2) — Intersection(s) avec Ox

3) — Sommet

4) — Intersection avec Oy

5) — Un point supplémentaire bien choisi (et son symétrique)

a) $f(x) = x^2 - 4x$

b) $g(x) = -x^2 + 4$

c) $h(x) = 2x^2 - 4x - 2$

d) $i(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

a) $f(x) = x^2 - 4x$

1) $a > 0 \rightarrow$ parabole convexe

2) Intersection avec $Ox \Rightarrow x^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$

$\rightarrow x_1 = 0 \rightarrow Z_1(0;0)$

$x_2 = 4 \rightarrow Z_2(4;0)$

3) Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow f(2) = 4 - 8 = -4$

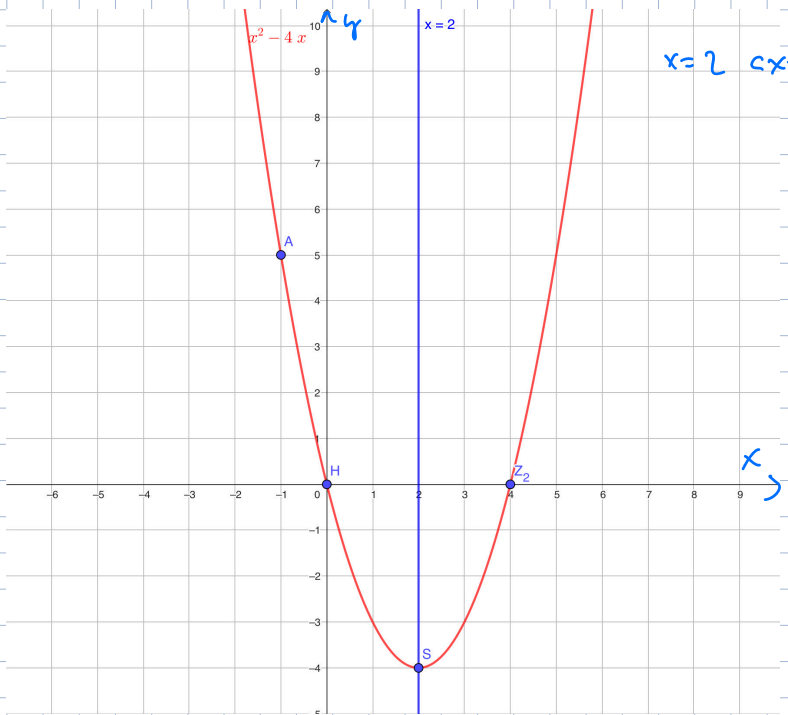
$\rightarrow S(2;-4)$

4) Intersection avec Oy : $H(0;C) \rightarrow H(0;0)$

5) Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = 2$

point supplémentaire : $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 + 4 = 5$

$\rightarrow A(-1;5)$



x = 2 axe de symétrie

b) $g(x) = -x^2 + 4$

1) $a < 0$ → parabole concave

2) Intersection avec Ox : $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$

→ $x_1 = -2$ → $Z_1(-2 ; 0)$

$x_2 = 2$ → $Z_2(2 ; 0)$

3) Sommet S : $-\frac{b}{2a} = 0$ → $g(0) = 4$

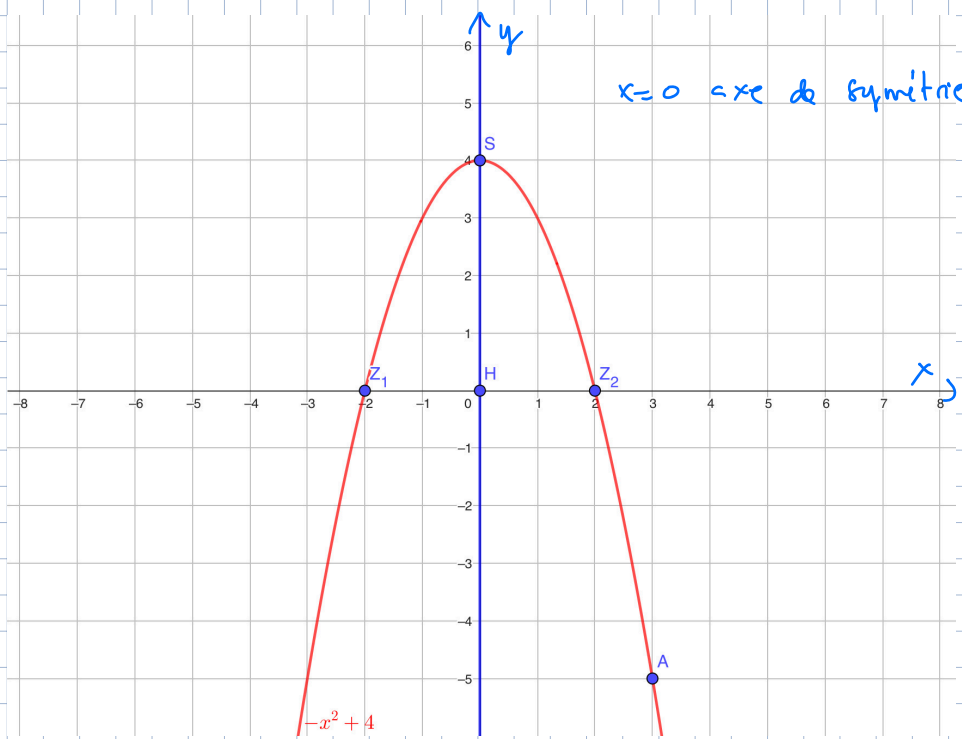
→ $S(0 ; 4)$

4) Intersection avec Oy : $H(0 ; C)$ → $H(0 ; 4)$

5) axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = 0$

Un point supplémentaire : $x = 3 \rightarrow g(3) = -9 + 4 = -5$

$\rightarrow A(3;-5)$



$x = 0$ axe de symétrie

c) $h(x) = 2x^2 - 4x - 2$

1) convexe car $a > 0$

2) Intersection avec Ox : $2x^2 - 4x - 2 = 0 \quad | \div 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-1) = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow Z_1(1+\sqrt{2}; 0)$

$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow Z_2(1-\sqrt{2}; 0)$

3) Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow h(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 2 = -4$

$\rightarrow S(1;-4)$

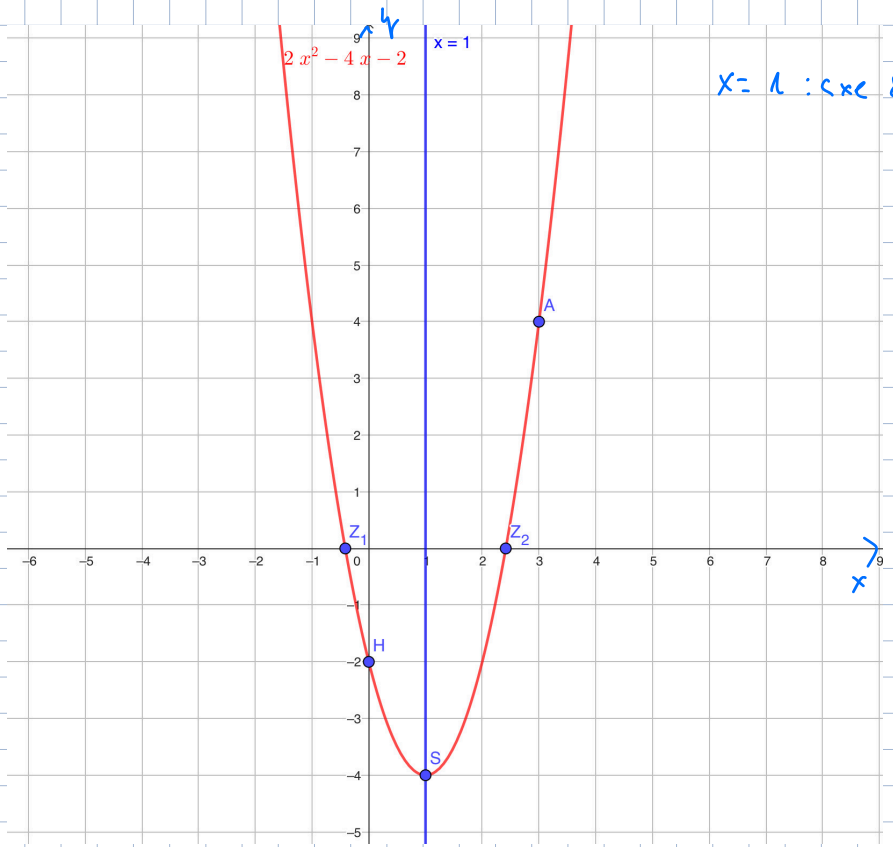
4) Intersection avec Oy : $H(0;C) \rightarrow H(0;-2)$

5) Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = 1$

un point supplémentaire : $x = 3 \rightarrow h(3) = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 3 - 2$

$= 18 - 14 = 4$

$\rightarrow A(3;4)$



x = 1 : axe symétrie

d) $i(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

1) $-\frac{1}{2} < 0 \rightarrow$ concave

2) Intersection avec Ox : $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-1)8 = 4 + 32 = 36 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

$x_1 = \frac{2-6}{-2} = 2 \rightarrow t_1(2;0)$

$x_2 = \frac{2+6}{-2} = -4 \rightarrow t_2(-4;0)$

3) Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2(-\frac{1}{2})} = -1 \Rightarrow i(-1) = \frac{-1}{2} + 1 + 4 = \frac{9}{2}$

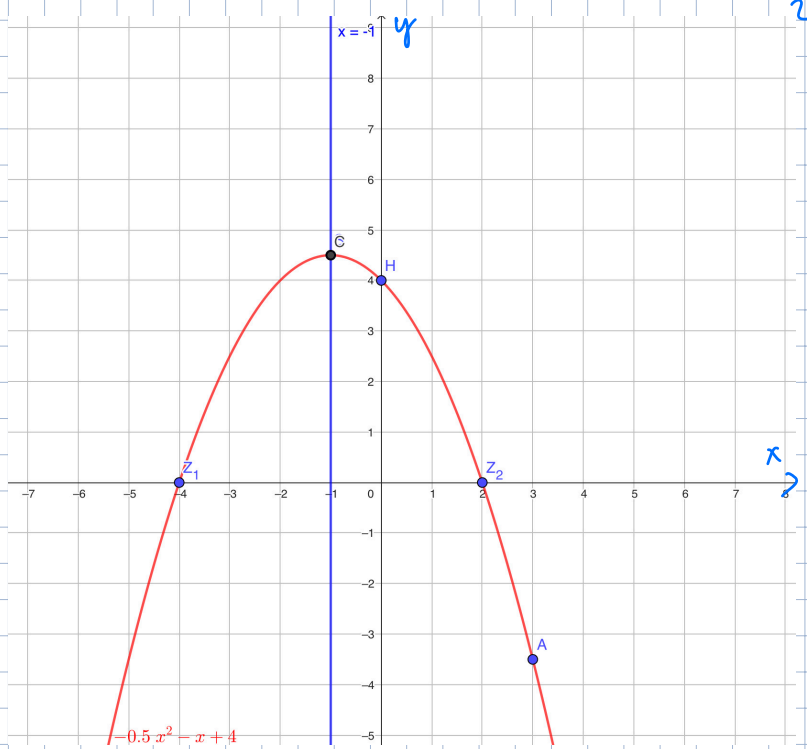
$\rightarrow S(-1; 4,5)$

4) Intersection avec Oy : $H(0;C) \rightarrow H(0;4)$

5) Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = -1$

un point supplémentaire : $x = 3 \rightarrow i(3) = -\frac{9}{2} \cdot 3 + 4 = -\frac{9}{2} + 1$

$= \frac{-9+2}{2} = \frac{-7}{2} \rightarrow A(3; -\frac{7}{2})$



2.7 On donne ci-dessous une liste d'expressions définissant des fonctions quadratiques. Pour chacune d'entre elles :

- déterminer le sommet et toutes les intersections avec les axes ;
- esquisser le graphe correspondant.

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = x^2 - 9$

c) $f_3(x) = x^2 + 5\,x + 6$

d) $f_4(x) = x^2 - x - 6$

e) $f_5(x) = 4 - x^2$

f) $f_6(x) = x^2 + x - 1$

g) $f_7(x) = x^2 - x + 1$

h) $f_8(x) = -x^2 - 4\,x + 5$

i) $f_9(x) = -2\,x^2 + 13\,x - 15$

j) $f_{10}(x) = (x - 4)\,(x + 3)$

k) $f_{11}(x) = (x - 1)^2 + 5$

l) $f_{12}(x) = 3 - (x - 1)\,(x + 1)$

m) $f_{13}(x) = (x + 2)^2 + (x - 1)^2$

n) $f_{14}(x) = -2\,(x + 2)^2 - 2$

o) $f_{15}(x) = -3\,x^2 + 4\,x + 5$

p) $f_{16}(x) = (3\,x - 2)^2 - (x + 1)$

q) $f_{17}(x) = 1 - x - x^2$

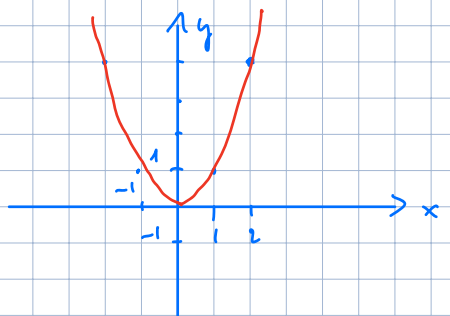
r) $f_{18}(x) = 3\,x - x^2$

s) $f_{19}(x) = -(1/2)\,x^2$

t) $f_{20}(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x$

a) $f_1(x) = x^2$

- Sommet : $-\frac{b}{2a} = 0 \rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow S(0;0)$
- intersection avec Oy : $I(0;0)$
- Intersection avec Ox : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \; (0;0)$

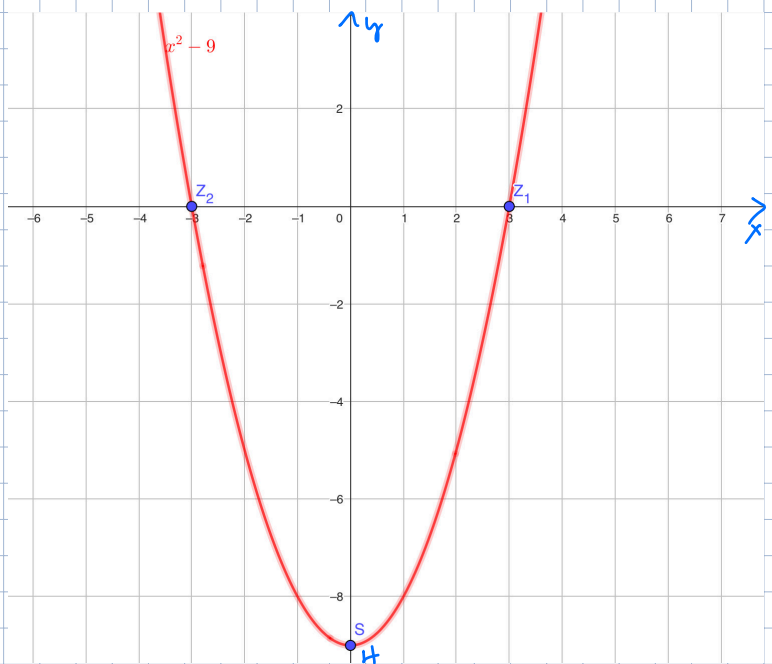


b) $f_2(x) = x^2 - 9$

- Sommet : $-\frac{b}{2a} = 0 \rightarrow f_2(0) = -9 \Rightarrow S(0;-9)$
- Intersection avec Oy : $H(0;-9)$
- Intersection avec Ox : $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$

$x_1 = -3 \rightarrow Z_1(-3;0)$

$x_2 = 3 \rightarrow Z_2(3;0)$



j) $f_{10}(x) = (x-4)(x+3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$

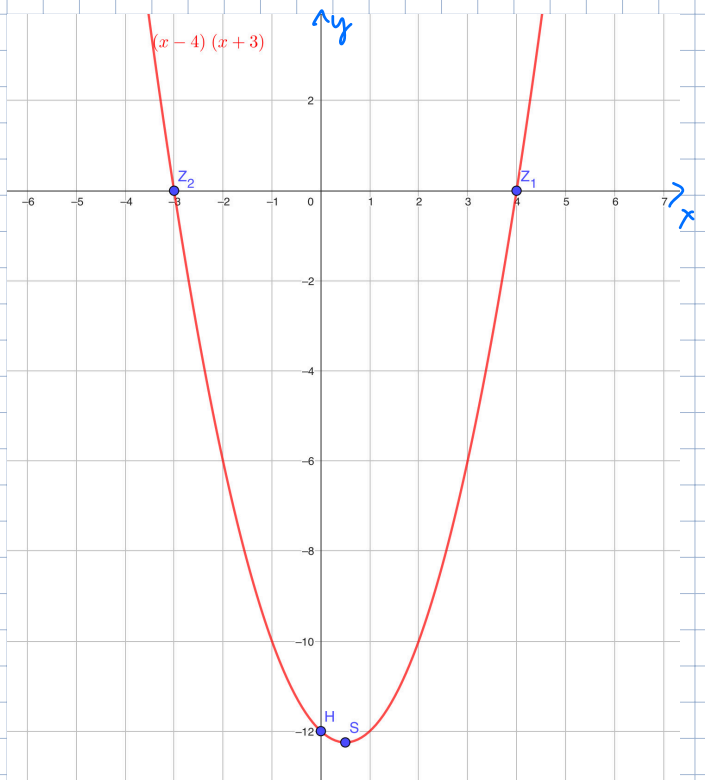
- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 12 = \frac{1-2-48}{4}$

$= -\frac{49}{4}$

$\Rightarrow S\left(\frac{1}{2}; -\frac{49}{4}\right)$

- Intersection avec Oy : $H(0;-12)$
- Intersection avec Ox : $(x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \rightarrow Z_1(4;0)$

$x_2 = -3 \Rightarrow t_2(-3;0)$



p) $f_{16}(x) = \underbrace{(3x-2)^2} - (x+1)$

identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow f_{16}(x) = 9x^2 - 12x + 4 - x - 1 = 9x^2 - 13x + 3$

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = \frac{13}{18} \Rightarrow f_{16}\left(\frac{13}{18}\right) = 9\cdot\left(\frac{13}{18}\right)^2 - 13\cdot\frac{13}{18} + 3$

$f_{16}\left(\frac{13}{18}\right) = 9\cdot\frac{169}{324} - \frac{169}{18} + 3 = \frac{169}{36} - \frac{169}{18} + 3 = \frac{169 - 338 + 108}{36} = -\frac{61}{36}$

$\Rightarrow S\left(\frac{13}{18}; -\frac{61}{36}\right)$

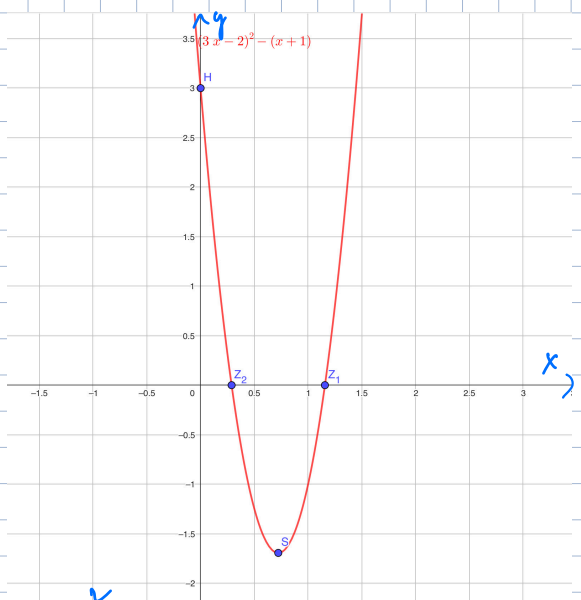
- Intersection avec Oy : $H(0;c) \rightarrow H(0;3)$

- Intersection avec Ox : $9x^2 - 13x + 3 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 169 - 108 = 61 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{61}$

$\rightarrow x_1 = \frac{13 - \sqrt{61}}{18} \rightarrow Z_1 \left(\frac{13 - \sqrt{61}}{18} ; 0 \right)$

$x_2 = \frac{13 + \sqrt{61}}{18} \rightarrow Z_2 \left(\frac{13 + \sqrt{61}}{18} ; 0 \right)$

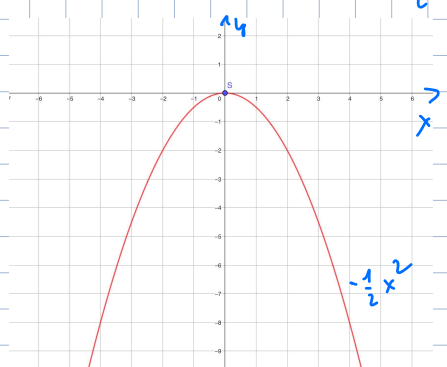


5) $f_{1g}(x) = -\frac{1}{2}x^2$

- Sommet S : $-\frac{b}{2a} = 0 \rightarrow f_{1g}(0) = 0 \rightarrow S(0;0)$

- Intersection avec Oy : $H(0;0)$

- Intersection avec Ox : $-\frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Z(0;0)$



2.8 a) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$.

b) Vérifier que la parabole d'équation $y = (x-3)^2$ est tangente à la droite $y = 2x - 7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

c) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$.

d) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$.

e) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$

points d'intersection : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = -4x + 10$ | $+4x - 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4x + 4 - 10 = 0$ | CL

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$\Rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ 2 points d'intersection.

$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2 \rightarrow g(-2) = -4(-2) + 10 = 18$

$\rightarrow$ **$I_1(-2 ; 18)$**

$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3 \rightarrow g(3) = -4 \cdot 3 + 10 = -2$

$\rightarrow$ **$I_2(3 ; -2)$**

b) $y = (x-3)^2$ est tangente à la droite $y = 2x - 7 \Leftrightarrow$ un seul point d'intersection

$\Rightarrow (x-3)^2 = 2x - 7$ | $(a-b)^2$

$x^2 - 6x + 9 = 2x - 7$ | $-2x + 7$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 2x + 9 + 7 = 0$ | CL

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ un seul point d'intersection !

$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y = 2 \cdot 4 - 7 = 8 - 7 = 1$

$\rightarrow$ **I (4 ; 1)**

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$

points d'intersection : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 18$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x^2 - 4x + 12x + 3 - 18 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 15 = 0$

$\Delta = 64 - 4(-1)(-15) = 64 - 60 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \frac{-8-2}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \Rightarrow f(5) = 2(5)^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 50 - 20 + 3 = 33$

$\rightarrow$ **I_1 (5 ; 33)**

$x_2 = \frac{-8+2}{-2} = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$

$\rightarrow$ **I_2 (3 ; 9)**

d) $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$

$\rightarrow$ points d'intersection : $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 13x - 48 = x^2 - 11x + 24$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 - x^2 + 13x + 11x - 48 - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 24x - 72 = 0 \quad | \div 2$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 12x - 36 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4(-1)(-36) = 144 - 144 = 0$

$\rightarrow$ un seul point d'intersection : $x = \frac{-12}{-2} = 6$

$\rightarrow f(6) = -(6)^2 + 13 \cdot 6 - 48 = -36 + 78 - 48 = -6$

$\rightarrow$ **$I(6 ; -6)$**

e) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$

$\rightarrow$ points d'intersection : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + x = 2x^2 - 6 \quad | -2x^2 + 6$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x^2 + x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 + x + 6 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)(6) = 1 + 24 = 25 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \rightarrow f(-2) = 4 - 2 = 2 \rightarrow$ **$I_1(-2 ; 2)$**

$x_2 = \frac{-1-5}{-2} = 3 \rightarrow f(3) = 9 + 3 = 12 \rightarrow$ **$I_2(3 ; 12)$**

2.9 On considère la parabole donnée par

$$f(x) = y = -2x^2 + 4x + 3$$

et la droite d'équation

$$g(x) = y = x - 2$$

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphiques de la parabole et de la droite.

b) Déterminer la distance verticale maximale entre la parabole et la droite entre les deux points d'intersection.

a) points d'intersection entre la parabole et la droite :

$$-2x^2 + 4x + 3 = x - 2 \quad | \; -x + 2$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x - x + 3 + 2 = 0 \quad | \; CL$$

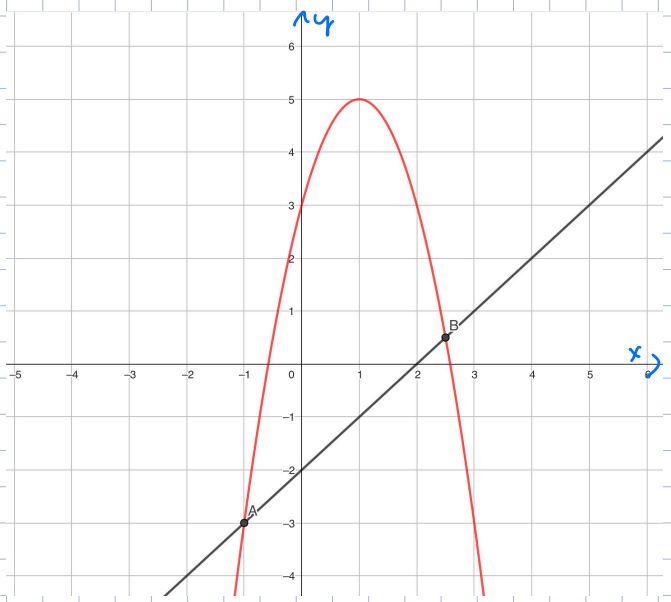
$$\Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-2)\cdot 5 = 9 + 40 = 49 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{-4} = -1 \Rightarrow y = -1 - 2 = -3 \rightarrow \boxed{A(-1;-3)}$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{-4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{B\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)}$$



b) La distance h correspond à la différence de "hauteur" entre la parabole et la droite.

⇒ $f(x) - g(x) = -2x^2 + 4x + 3 - (x - 2)$

$= -2x^2 + 4x + 3 - x + 2 = -2x^2 + 3x + 5$

⇒ c'est une fonction quadratique ⇒ la hauteur maximale = la hauteur du sommet de la parabole : $-2x^2 + 3x + 5$

$a = -2$ $b = 3$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$

⇒ hauteur verticale maximale : $-2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 = -2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 5$

$= -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = \frac{-9 + 18 + 40}{8} = \frac{49}{8}$

⇒ La distance verticale maximale est de $\frac{49}{8}$

