

LES GUIDES MANGAS

ANALYSE



Auteur
Dessins
Scénario

**HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
SHINJIRO NISHIDA
EIJI SHIMADA
BECOM**

enseignant-chercheur
dessinateur
scénariste
scénariste

Studio

Traduction

**VINCENT BECK
CÉLINE CHEVALIER
SÉBASTIEN DESREUX
KEVIN DESTAGNOL
TRISTAN POULLAOUEC**

enseignant-chercheur
enseignant-chercheur
docteur en algorithmique
docteur en mathématiques
enseignant en classe prépa

Harmonisation

VINCENT BECK

enseignant-chercheur

Révision de la traduction

JEAN-YVES FÉVRIER

agrégé d'économie



Préface

— Certaines aventures ne peuvent réussir que grâce au manga —

Puisque vous feuillotez ce livre, vous aimez les mangas ou vous espérez faire des progrès en analyse (ou les deux !).

Si vous aimez les mangas, si vous vous dites « L'analyse sous forme de manga ? Génial ! », vous pouvez aller directement à la caisse, vous ne serez pas déçu. Ce manga est vraiment réussi, et ce n'est pas un hasard : les dessins sont de Shin Togami, un auteur de mangas reconnu, et le scénario a été écrit par Becom, un vrai studio de mangas.

Mais vous vous dites peut-être que « Les mangas sur les mathématiques sont toujours loupés... » C'est vrai. D'ailleurs, quand un éditeur chez Ohmsha m'a proposé d'écrire ce livre, j'ai bien failli refuser – et laisser passer une belle occasion. Les soi-disant « mangas éducatifs » sont vraiment décevants. Ils ont certes des illustrations, de grandes images, mais ils n'ont ni une vraie histoire, ni des personnages attachants. Ce n'est qu'après avoir lu un extrait d'un autre titre (le *Guide manga des statistiques*) que j'ai changé d'avis. Contrairement aux autres mangas éducatifs, celui-ci était très bien conçu, très bien réalisé ; il donnait vraiment envie de le lire. L'éditeur m'a promis que le mien serait aussi bon, alors j'ai accepté. Je m'étais souvent dit que les mangas pourraient me permettre de mieux enseigner les mathématiques, et c'était l'occasion de mettre l'idée en pratique. Je vous garantis que plus vous aimez les mangas, plus vous aimerez ce livre.

Vous pouvez aussi avoir ouvert ce livre en vous disant « Je n'aime pas beaucoup l'analyse, ça passera peut-être mieux avec du manga. » Dans ce cas, c'est vraiment le livre qu'il vous faut. Il aidera ceux qui se sont blessés avec l'analyse à faire leur rééducation. Car il ne se contente pas d'expliquer l'analyse via le manga, il la présente aussi d'une manière qui est fondamentalement différente de celle que l'on trouve dans les manuels traditionnels. D'abord, il montre par des exemples issus de la physique, des statistiques et de l'économie, à quoi l'analyse sert en pratique, ce que l'on ne

peut pas comprendre avec des méthodes d'enseignement qui se cantonnent aux limites ou aux ε - δ . Sans une idée claire de ce qu'est l'analyse et de la manière dont elle est mise en œuvre dans le monde réel, on ne peut pas vraiment comprendre le sujet ni l'utiliser avec confiance ; l'analyse se réduit alors à la mémorisation de formules et de règles. Grâce à cette approche, vous ne verrez plus l'analyse comme une épreuve mais comme un outil.

Ensuite, ce livre explique toutes les formules au moyen d'*approximations au premier ordre*, ce qui aide à se représenter ce qu'elles veulent dire et à les comprendre facilement. Grâce à cette méthode d'enseignement géniale, on passe rapidement et aisément de la dérivation à l'intégration par exemple.




Ce livre va aussi plus loin que les autres mangas consacrés à l'analyse. Il ne recule ni devant les développements de Taylor, ni devant les dérivées partielles.

Tout ceci n'a été rendu possible que par le manga. Pourquoi apprend-on mieux avec un manga qu'avec un livre de cours ? Parce que le manga est une information visuelle, enrobée dans une histoire. Il parle aux sens et au cœur. En plus, l'analyse est particulièrement adaptée au manga car elle est la branche des mathématiques qui décrit les phénomènes dynamiques.

Je vous invite maintenant à tourner la page et à profiter d'un délicieux cocktail de manga et de mathématiques.

Hiroyuki Kojima

Table des matières

Préface	3
Prologue : qu'est-ce qu'une fonction ?	7
Exercice	20
1 Dérivons une fonction !	21
 1 Approcher par des fonctions	22
2 Calcul de l'erreur relative	33
3 Les dérivées en action!	38
4 Calculer une dérivée	45
Exercices	47
2 Apprenons les techniques de dérivation!	49
 1 Règle de dérivation d'une somme	54
2 Règle de dérivation d'un produit	59
3 Dérivation des polynômes	68
4 Trouver les maximums et les minimums	70
5 Théorème des accroissements finis	78
6 Règle de dérivation d'un quotient	80
7 Dérivée d'une fonction composée	81
8 Dérivée d'une fonction réciproque	81
Exercices	82
3 Intégrons une fonction !	83
 1 Illustration du théorème fondamental de l'analyse	88
2 Le théorème fondamental de l'analyse	97
3 Formules d'intégration	101
4 Applications du théorème fondamental	107
5 Bilan	116
6 Formule du changement de variable en intégration	117
7 Règle d'intégration pour les puissances	118
Exercices	118

4 Apprenons les techniques d'intégration ! _____ 119



1 Fonctions trigonométriques	120
2 Intégration des fonctions trigonométriques	129
3 Fonctions exponentielle et logarithme	135
4 Généralisation des fonctions exponentielle et logarithme	139
5 Résumé : fonctions exponentielle et logarithme	144
6 Intégration par parties	147
Exercices	148

5 Apprenons les développements de Taylor ! _____ 149



1 Approcher par des polynômes	151
2 Les coefficients de Taylor	159
3 Développements de Taylor de diverses fonctions	164
4 Que nous apprennent les développements de Taylor ?	165
Exercices	182

6 Apprenons les techniques de dérivation partielle ! _____ 183



1 Que sont les fonctions de plusieurs variables ?	184
2 Fonctions affines de deux variables	188
3 Les dérivées partielles	195
4 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	201
5 Conditions d'extremum	203
6 Une application à l'économie	206
7 Règle de la chaîne	210
8 Dérivées des fonctions implicites	222
Exercices	222

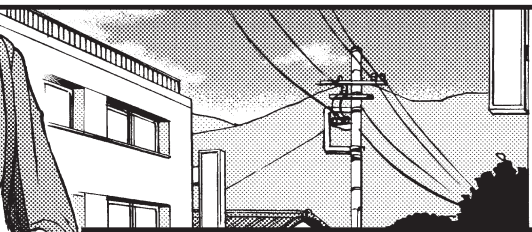
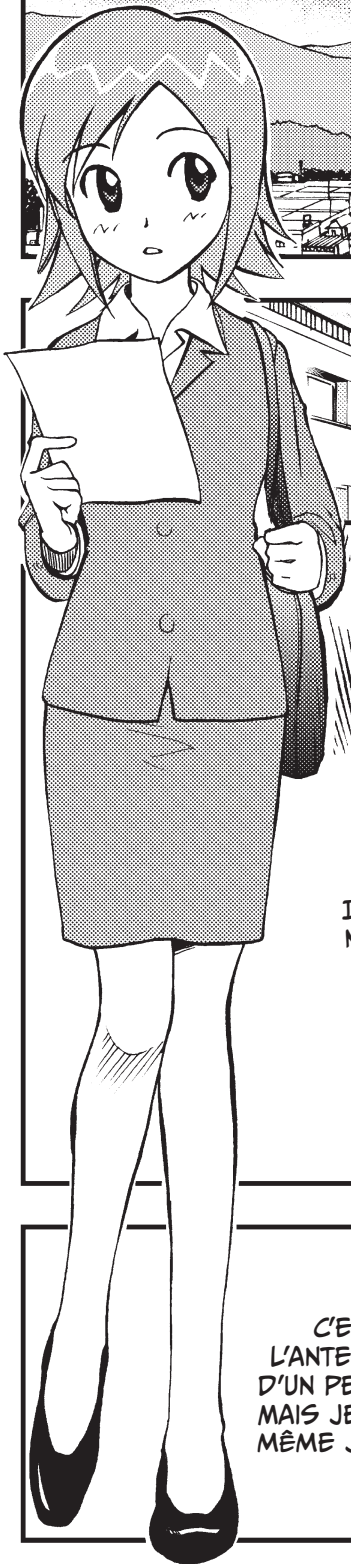
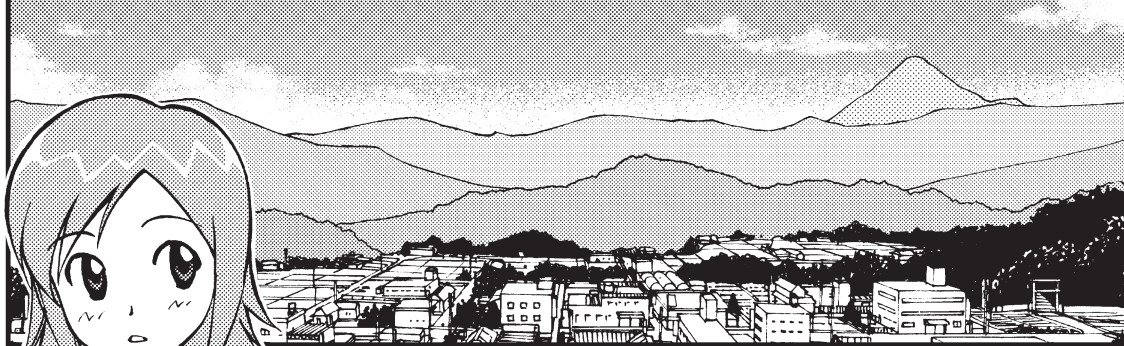
Épilogue : à quoi servent les mathématiques ? _____ 223

Solutions de tous les exercices	229
Formules, fonctions et théorèmes principaux du livre	232
Index	237

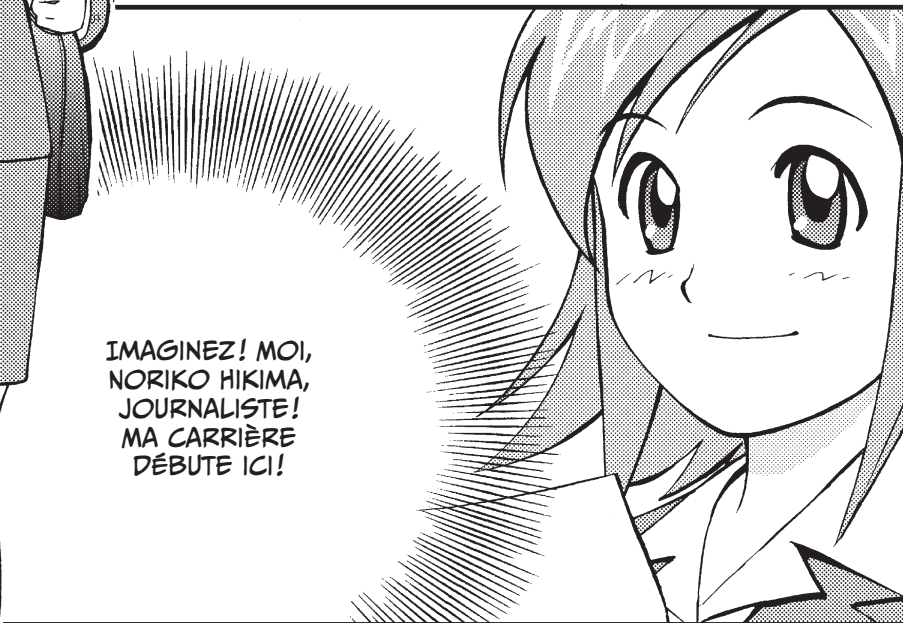
PROLOGUE

QU'EST-CE QU'UNE FONCTION ?





LE BUREAU DU ASAGAKE TIMES À SANDA-CHO DOIT ÊTRE PAR ICI.



IMAGINEZ! MOI, NORIKO HIKIMA, JOURNALISTE! MA CARRIÈRE DÉBUTE ICI!

C'EST JUSTE L'ANTENNE LOCALE D'UN PETIT JOURNAL. MAIS JE SUIS QUAND MÊME JOURNALISTE!



JE TRAVAILLERAI DUR!!

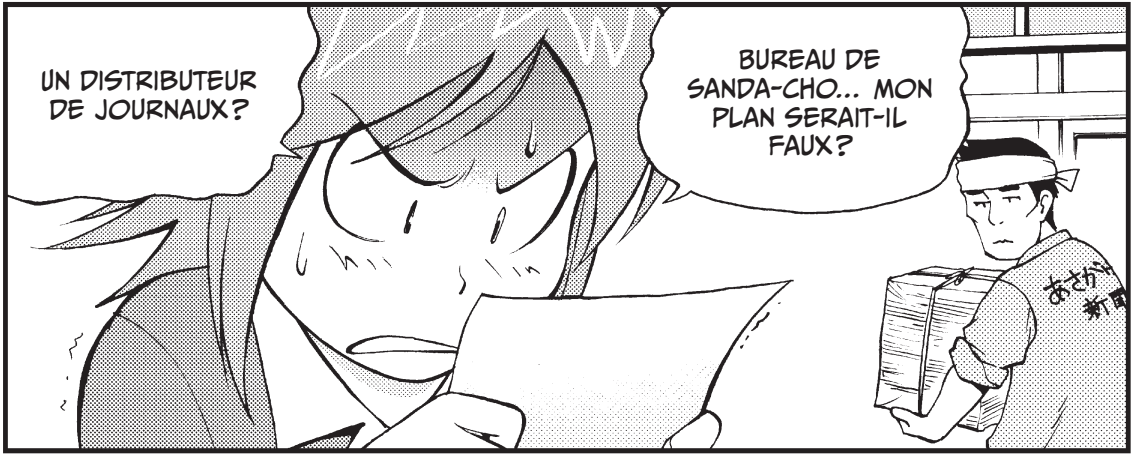
DISTRIBUTEUR DU ASAGAKE
TIMES À SANDA-CHO

あさがけ新聞
算田町 営業



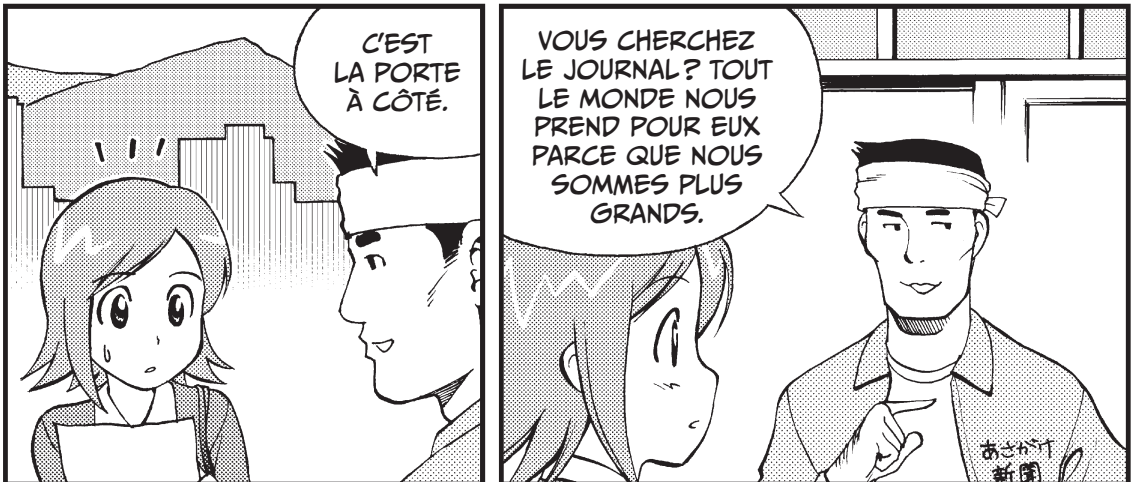
UN DISTRIBUTEUR
DE JOURNAUX?

BUREAU DE
SANDA-CHO... MON
PLAN SERAIT-IL
FAUX?



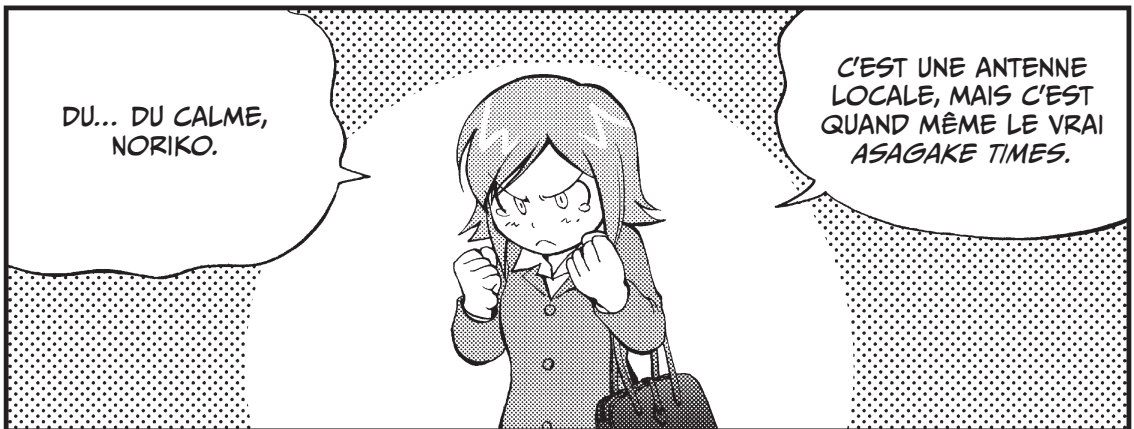
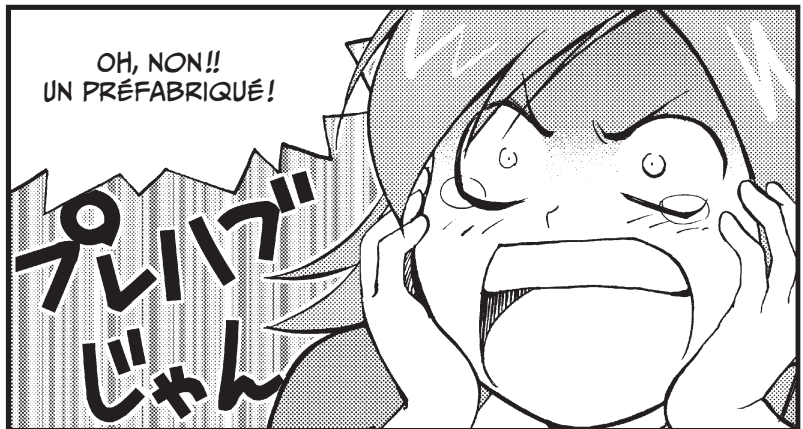
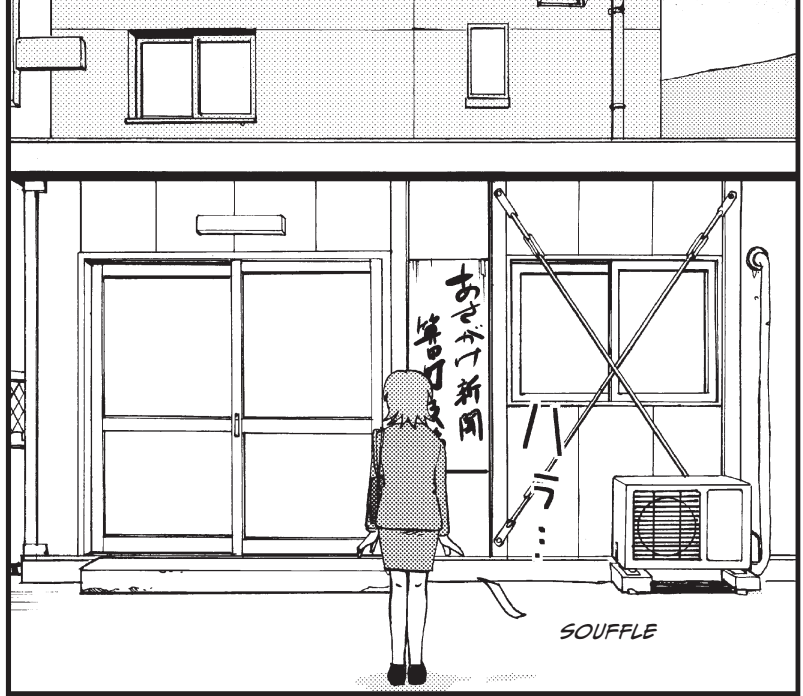
C'EST
LA PORTE
À CÔTÉ.

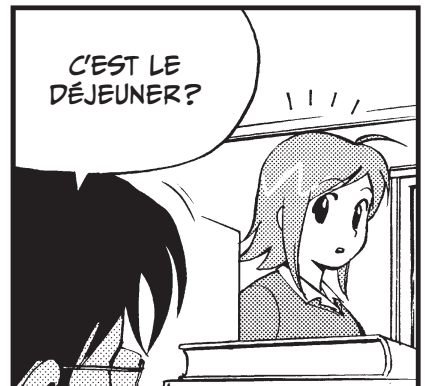
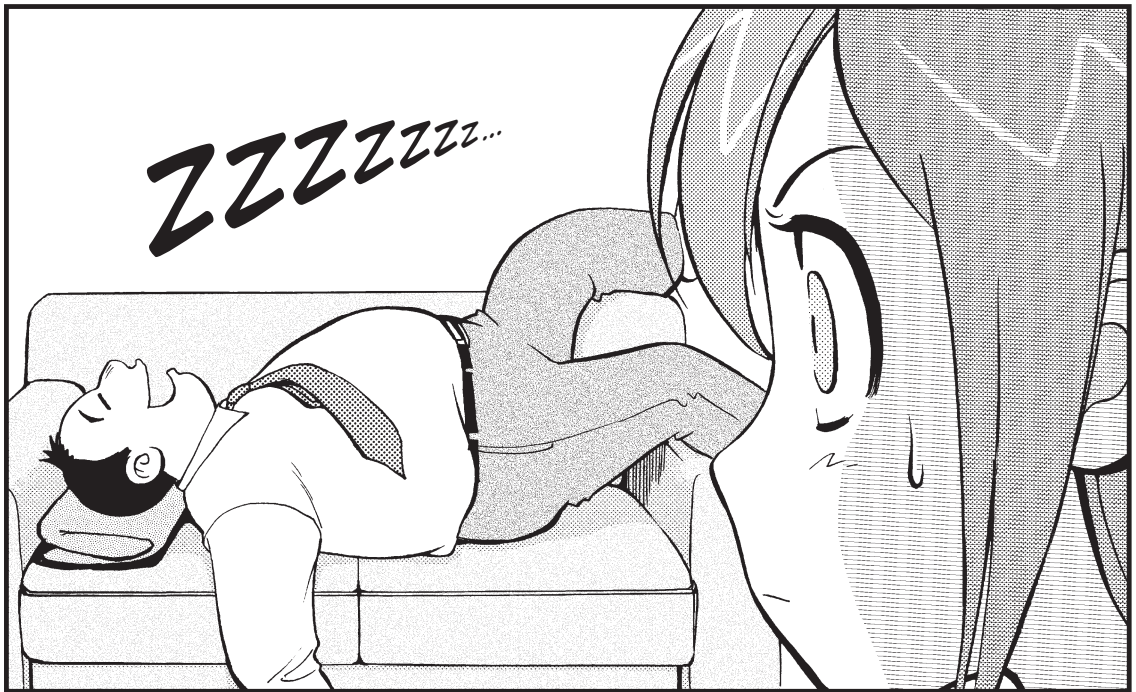
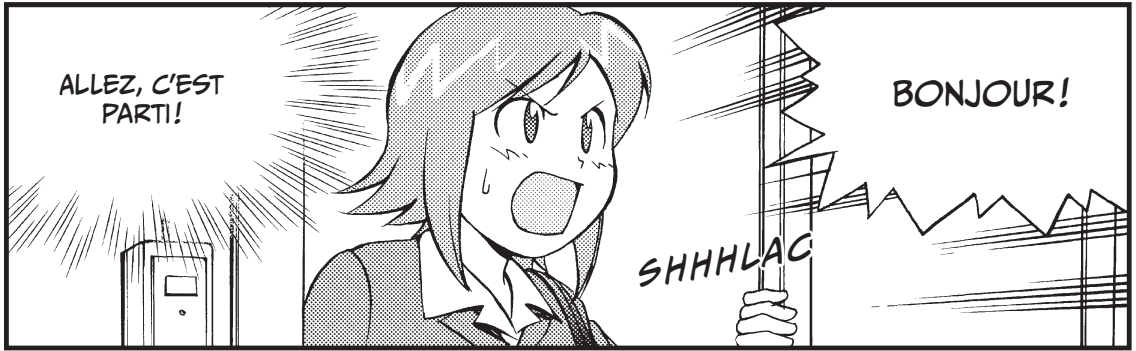
VOUS CHERCHEZ
LE JOURNAL? TOUT
LE MONDE NOUS
PREND POUR EUX
PARCE QUE NOUS
SOMMES PLUS
GRANDS.

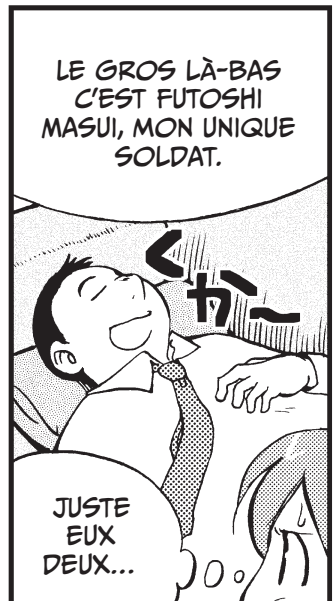
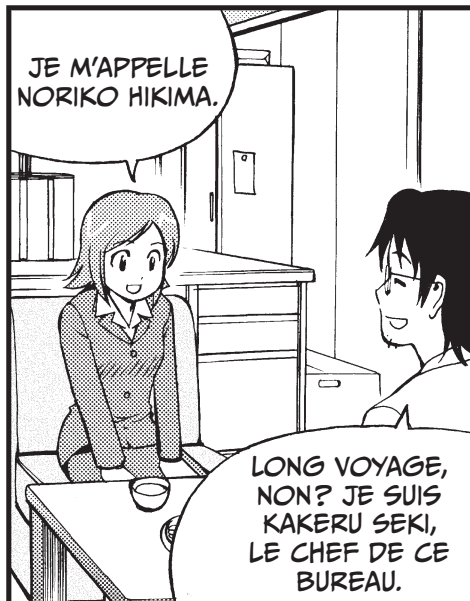


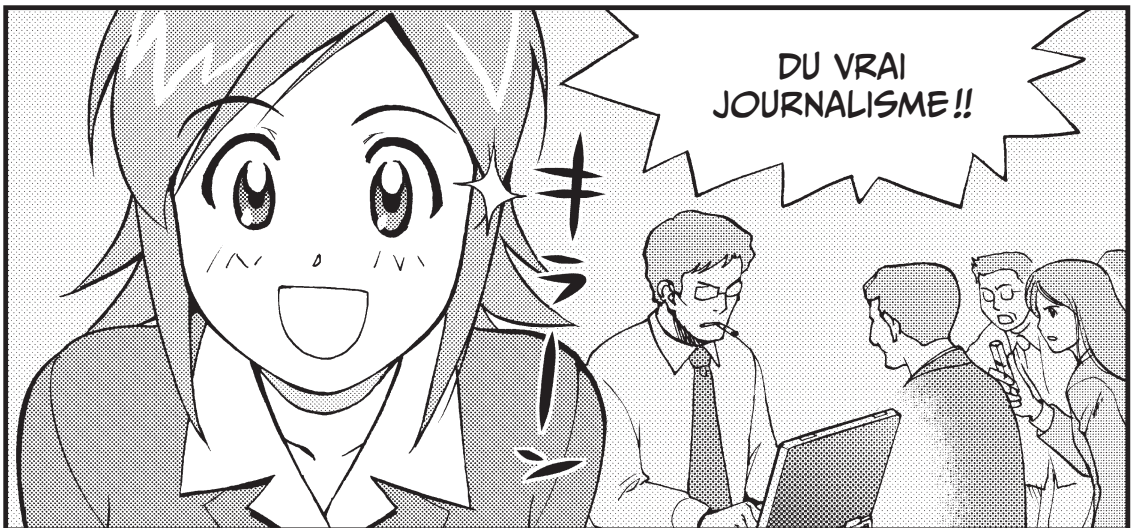
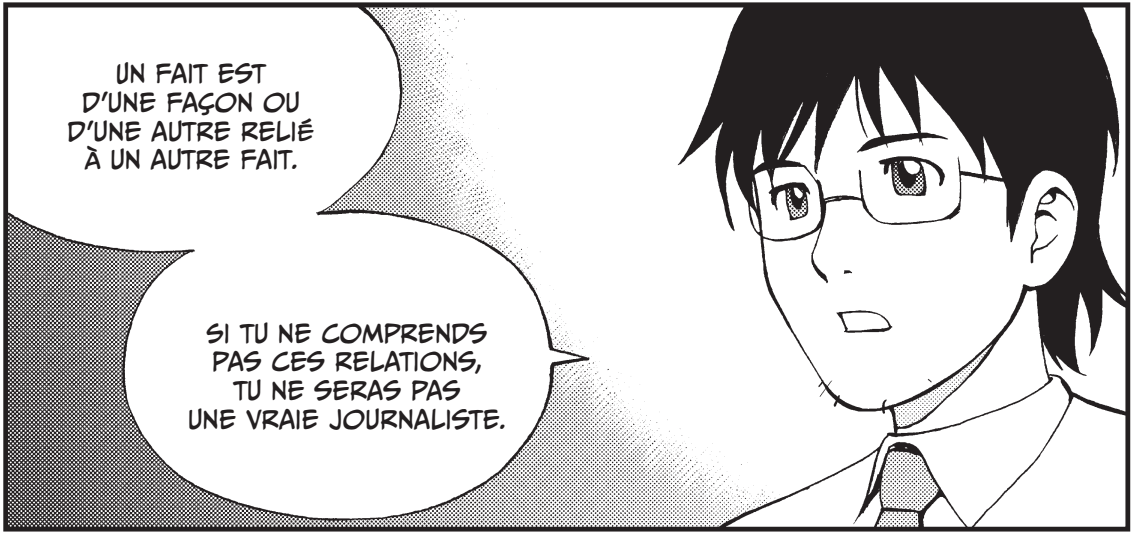
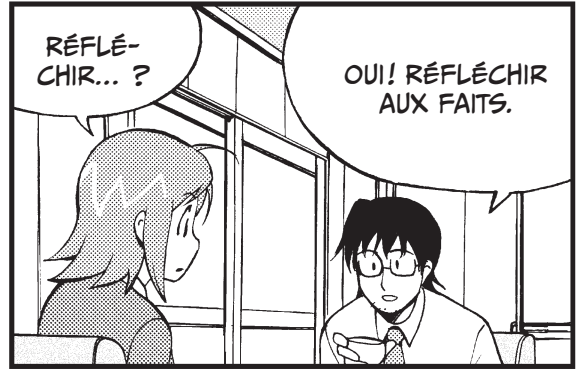
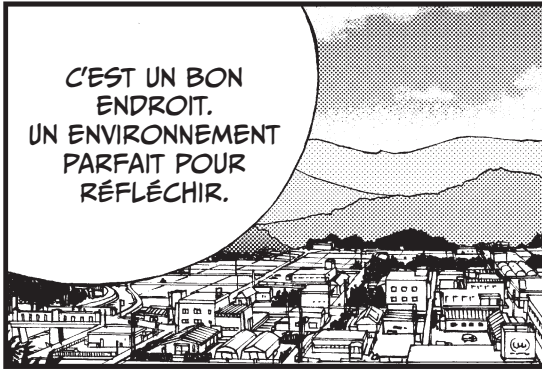
BUREAU DU ASAGAKE TIMES
À SANDA-CHO

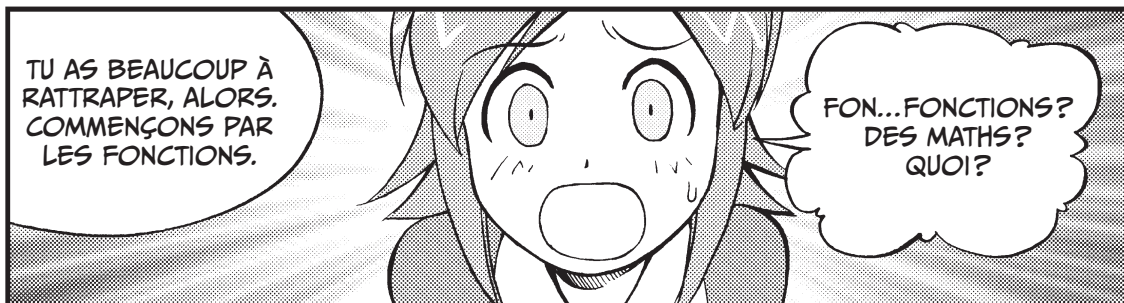
あさかけ新聞
算田町支局

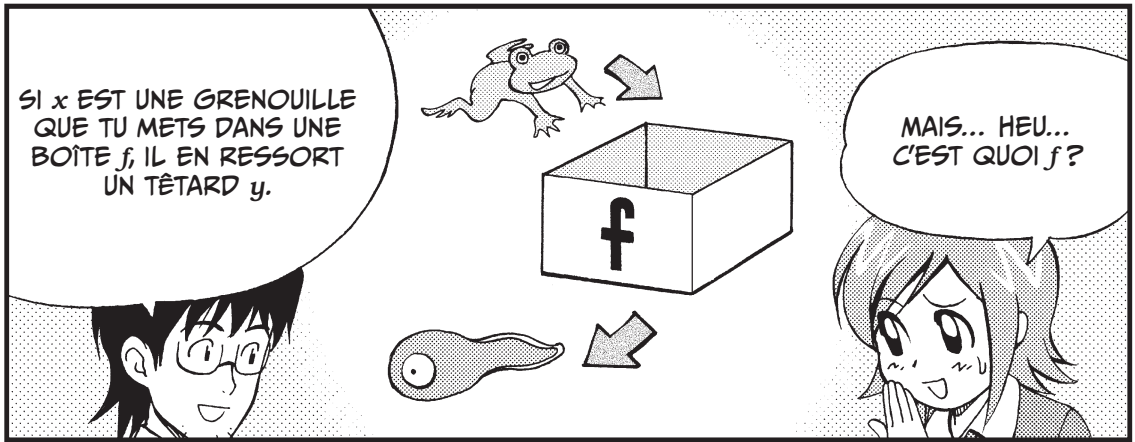
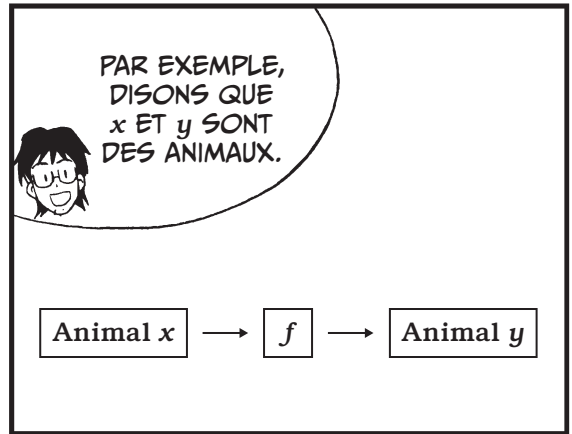












DANS CE CAS, f EXPRIME LA RELATION OU LE RAPPORT ENTRE « PARENT » ET « DESCENDANT ».

PARENT → f → DESCENDANT

ET CETTE RELATION EST VRAIE POUR PRESQUE TOUS LES ANIMAUX. SI x EST UN OISEAU, y EST UN OISILLON.

D'ACCORD! MAINTENANT REGARDONS ÇA.

Chute des ventes de caviar pendant la récession

PAR EXEMPLE, LA RELATION ENTRE LES REVENUS ET LES DÉPENSES PEUT ÊTRE VUE COMME UNE FONCTION.

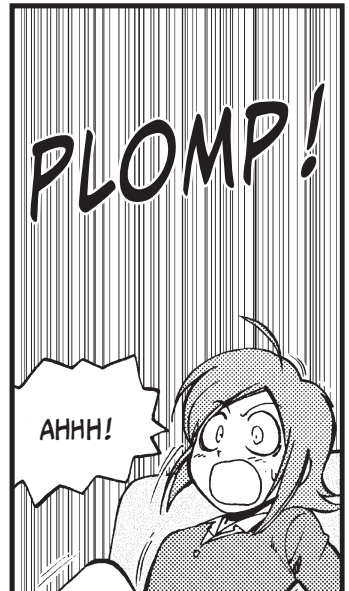
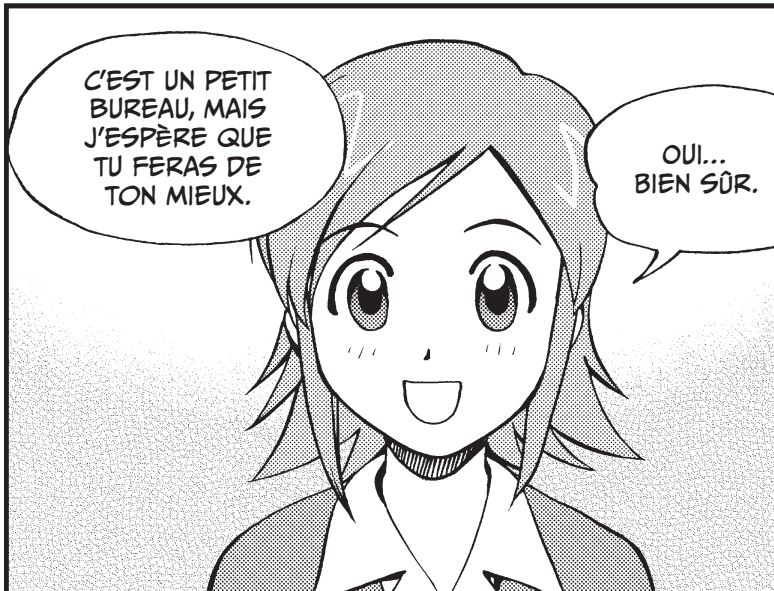
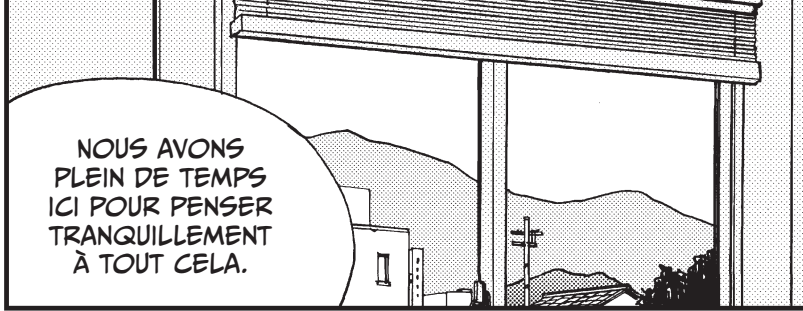
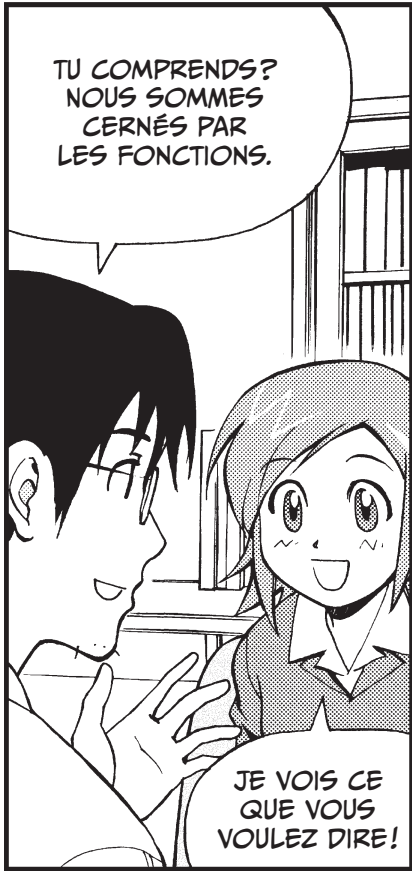
COMME QUAND LES EMPLOYÉS ONT UN BONUS SI LES VENTES DE LEUR ENTREPRISE GRIMPENT?

Le Scramjet X-43 atteint Mach 9,6 — Nouveau record du monde

LA VITESSE DU SON ET LA TEMPÉRATURE PEUVENT AUSSI ÊTRE RELIÉES PAR UNE FONCTION. QUAND LA TEMPÉRATURE AUGMENTE DE 1 °C, LA VITESSE DU SON AUGMENTE DE 0,6 M/S.

ET LA TEMPÉRATURE EN MONTAGNE DIMINUE D'ENVIRON 0,5 °C CHAQUE FOIS QU'ON MONTE DE 100 MÈTRES, N'EST-CE PAS?

YOU-HOU!



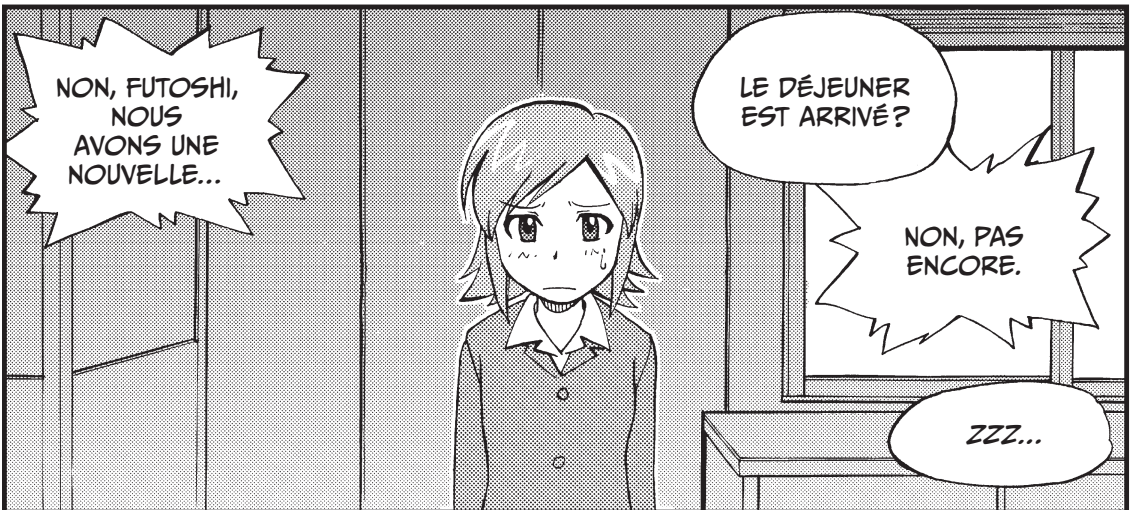
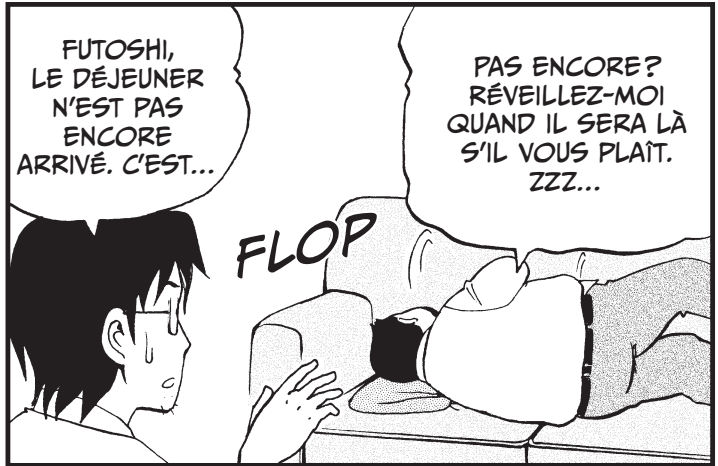
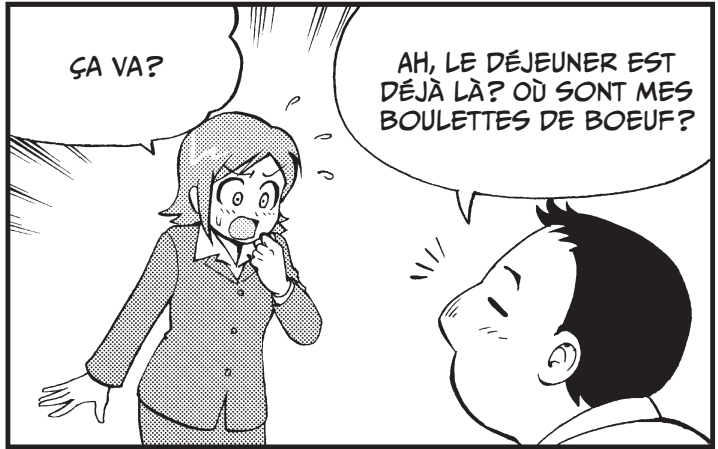
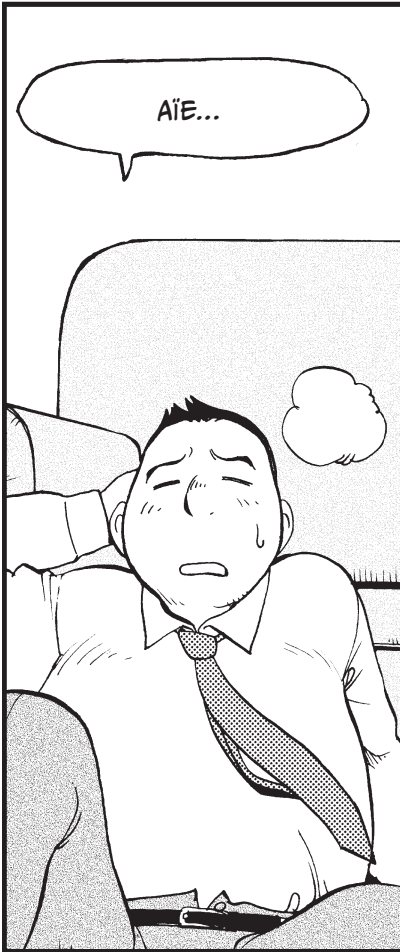
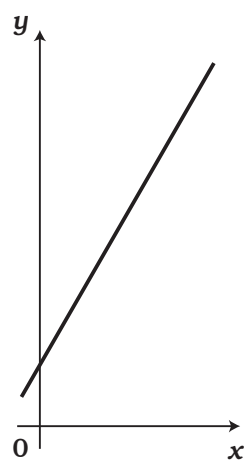
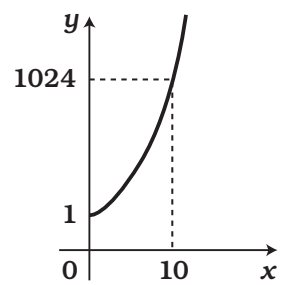


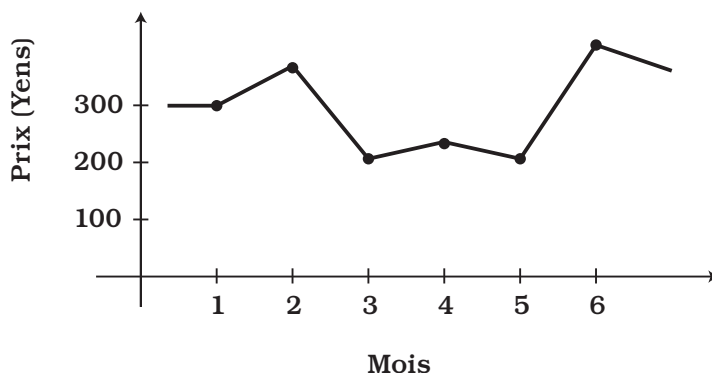
TABLEAU 1 : CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS

DOMAINE	CALCUL	GRAPHE
Causalité	<p>La fréquence des stridulations d'un gril- lon est déterminée par la température. On peut exprimer la relation entre y stridulations par minute et la tempéra- ture x °C à peu près par</p> $y = g(x) = 7x - 30$ <p style="text-align: center;"> \uparrow \downarrow $x = 27$ °C $7 \times 27 - 30$ </p> <p>À 27 °C : 159 stridulations par minute.</p>	<p>Quand on trace ces fonctions, on obtient une droite. On les appelle des fonctions affines.</p> 
Variation	<p>La vitesse du son y en mètre par seconde (m/s) dans l'air à x °C est donnée par</p> $y = v(x) = 0,6x + 331$ <p>À 15 °C, $y = v(15) = 0,6 \times 15 + 331 = 340$ m/s</p> <p>À -5 °C, $y = v(-5) = 0,6 \times (-5) + 331 = 328$ m/s</p>	
Conversion d'unités	<p>Convertir x degrés Fahrenheit (°F) en y degrés Celsius (°C)</p> $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ <p>50 °F correspond donc à</p> $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10$ °C <p>Les ordinateurs stockent les nombres comme des suites de 0 et de 1. Avec x bits (de l'anglais binary digits, « chiffres binaires ») on peut décrire y nombres différents, où</p> $y = b(x) = 2^x$ <p>(Ceci sera développé page 135.)</p>	<p>Le graphe est celui d'une exponentielle.</p> 

LES GRAPHES DE CERTAINES FONCTIONS NE SONT NI DES DROITES, NI DES COURBES À L'ALLURE RÉGULIÈRE.



Le prix P d'une action d'une entreprise A au mois x de 2017 s'écrit $y = P(x)$



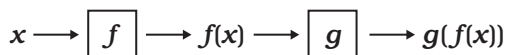
$P(x)$ ne peut pas s'exprimer avec des fonctions de référence, mais c'est quand même une fonction.

Si vous pouviez trouver un moyen de prédire $P(7)$, le prix de l'action en juillet, vous pourriez gagner beaucoup d'argent.

COMBINER DEUX FONCTIONS OU PLUS S'APPELLE « COMPOSER DES FONCTIONS ». CELA PERMET D'ÉTENDRE LA PORTÉE DE LA CAUSALITÉ.



La composée de f et g



Exercice (solution page 229)

1. Trouver une équation qui donne, pour un grillon, la fréquence z en stridulations/minute à x °F.