

Puissance et racines

1) Les puissances entières:

a) Puissances à exposants entiers naturels:

* Définition:

soit $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle puissance m -ième de a ou a à la puissance m , le produit de m facteurs de a . En d'autres termes:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}}$$

Le nombre a s'appelle la base de la puissance et le nombre m s'appelle l'exposant de la puissance.

* propriétés:

$$\text{i) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{ii) } (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{iii) } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{iv) } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$\text{v) } \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}$$

b) Puissances à exposants entiers relatifs:

* Définition:

Nous allons étendre la notion de puissances à exposants entiers positifs non nuls (i.e., $m \in \mathbb{N}^*$) aux puissances à exposants entiers (i.e., $n \in \mathbb{Z}$), de façon à conserver les propriétés déjà mentionnées :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\text{avec } a \in \mathbb{R}^*)$$

* Si $m = 0$

$$a^0 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n$$

$$a^0 \cdot a^m = a^m$$

$$a^0 = 1$$

Ainsi $a^0 = 1$

* Si $m = -n$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n}$$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^0$$

$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ainsi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

* Remarquons que si $a = 0$, l'expression $0^0 = 1$

* Nouvelles propriétés:

vi) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

2) Les racines :

* Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de a , noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre x positif tel que $x^n = a$. En d'autres termes :

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a \text{ et } x \geq 0$$

a : le radicande

n : l'indice

$\sqrt[n]{}$: le radical

* Définition :

i) si $a < 0$ et n est un entier impair, on définit la racine n -ième par :

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a$$

Exemple :

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ car } (-2)^3 = -8$$

ii) si $a < 0$ et n est un entier pair, la racine n -ième de a n'est pas définie.

Exemple :

$$\sqrt[4]{-16} \text{ n'est pas définie dans } \mathbb{R}$$

* propriétés:

Soit a et b deux nombres réels > 0 ; m, n et q des entiers > 0 ,

p un entier quelconque. On a:

$$i) (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$ii) \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$iii) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$iv) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ où } b \neq 0$$

$$v) (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$vi) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$vii) \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$$

! Attention:

a) Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas

"casser" la racine d'une somme en somme des racines. Réciproquement,

on ne peut pas directement repérer une somme de racines:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

b) L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie! En effet,

$$\bullet \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ ok! mais}$$

$$\bullet \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ on ne retrouve donc pas}$$

la valeur initiale - 3

= On peut énoncer une règle générale, valable pour tout nombre

$a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

où $|a|$: la valeur absolue de a .

3) Puissances à exposants rationnels :

* Définition :

si $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$= a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$\text{et } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'elle ne

dépend de la fraction choisie pour représenter l'exposant, donc que

$a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$. Or cela est vrai grâce à la propriété des racines

$$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$$