Optimisation

Plan de résolution :

1) Lire le problème attentivement en réalisant parallèlement une figure d'étude pour y indiquer toutes les informations.

2) Exprimer la quantité Q à optimiser (une aire, un volume, des coûts, ...) comme fonction d'une ou plusieurs variables.

3) Si Q dépend de plus d'une variable, par exemple n variables, trouver au moins $(n-1)$ équations liant ces variables.

4) Utiliser ces équations pour exprimer Q comme fonction d'une seule variable (par substitutions).

5) Déterminer l'ensemble de définition ED_f des valeurs admissibles de cette variable.

6) Calculer la dérivée de Q, fonction à optimiser.

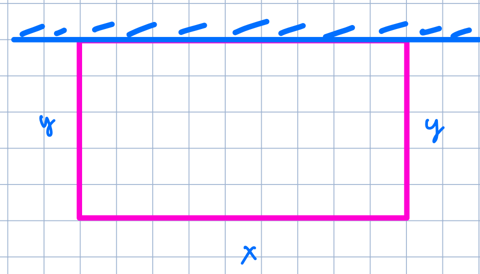
7) À l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de Q, étudier la croissance de cette fonction.

8) Calculer les extremums de Q sans oublier de contrôler ce qui se passe au bord de ED_f.

9) Répondre finalement à la question posée à l'aide d'une phrase.

Ex :

Un éleveur désire enclore un terrain rectangulaire bordant une rivière rectiligne. Il dispose de 1000m de fil de fer barbelé, et ne désire pas clôturer le côté longeant la rivière. Calculer la surface maximale qu'il peut enclore.



1) x : longueur , y : largeur $\Rightarrow$ Aire du terrain $f(x;y) = x \cdot y$

2) Puisque l'éleveur dispose de 1000 m de fil de fer barbelé

$\Rightarrow \quad x + 2y = 1000$

3) Or $\quad x = 1000 - 2y$

4) Par conséquent, l'aire du terrain à maximiser s'écrit :

$f(y) = (1000 - 2y) \cdot y$

5) Comme la largeur du terrain est comprise entre 0 m et 500 m,

On a : $ED_f = [0 ; 500]$

6) Rechercher la valeur maximale prise par la fonction $f(y)$ sur l'intervalle $ED_f = [0 ; 500]$

$f'(y) = 1000 - 4y$

$f'(y) = 0 \Rightarrow 1000 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 250$

7)

y	$-\infty$	0		250		500	$+\infty$
$f'(y)$			$+$	0	$-$		
$f(y)$			$\nearrow$	Max	$\searrow$		

8) $f(250) = 125000$

$f(0) = 0$

$f(500) = 0$

g) l'aire du terrain est maximale si sa largeur vaut $y = 250\,m$

Dans ce cas, la longueur du terrain mesure $x = 1000 - 2 \cdot 250$

$= 500\,m$

=> l'aire maximale du terrain est : $125000\,m^2$