CORRIGÉ

3.2.1 Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;-5)$ et d'angle directeur 120°.

Angle directeur $120°$: angle entre le vecteur directeur de la droite d et $\vec{e}_1$

$\Rightarrow \quad \tan(\alpha) = m \iff \tan(120^\circ) = \underbrace{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{Formulaire}}$

$\Rightarrow \quad m = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ droite cherchée : $(d) : \quad y = mx + h$

$\Rightarrow \quad y = -\sqrt{3}x + h$

$A \in (d) \quad \Rightarrow \quad -5 = -\sqrt{3}(-1) + h \Rightarrow h = -5 - \sqrt{3}$

d'où $(d) : \quad y = -\sqrt{3}x - 5 - \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ équation cartésienne canonique : $\quad -\sqrt{3}x - y - 5 - \sqrt{3} = 0$

ou $(d) : \boxed{\sqrt{3}x + y + 5 + \sqrt{3} = 0}$

3.2.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites suivantes :

a) $d_1 : 5x - y = 7$ $\quad d_2 : 3x + 2y = 0$

b) $d_1 : 2y = 3x + 7$ $\quad d_2 : 2x + 3y = 5$

c) $d_1 : x = 2y + 4$ $\quad d_2 : 2x - 4y + 3 = 0$

d) $d_1 : 3x + 2y = 1$ $\quad d_2 : 5x = 2y - 3$

(a) $(d_1) : 5x - y = 7$ $\quad$, $(d_2) : 3x + 2y = 0$

$\Rightarrow y = 5x - 7$ $\quad \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$

$\Rightarrow m_1 = 5$ $\quad \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{-\frac{3}{2} - 5}{1 - \frac{15}{2}} \right| = \left| \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{13}{2}} \right| = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$$

b) $(d_1) : 2y = 3x + 7$ $\quad (d_2) : 2x + 3y = 5$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ $\quad \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

$\Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$ $\quad \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$

On remarque que $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

$\Rightarrow \varphi = 90°$

c) $(d_1) : x = 2y + 4$ $\quad (d_2) : 2x - 4y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2$ $\quad \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$

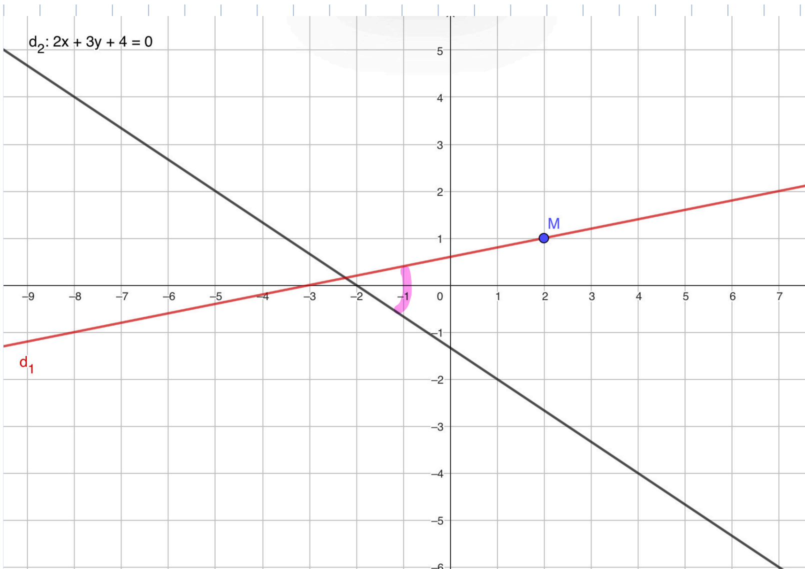
$m_1 = m_2 \Rightarrow \varphi = 0°$

d) $(d_1) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ $\quad (d_2) : y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$ $\quad m_2 = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{15}{4}} \right| \Rightarrow \varphi \cong 55{,}49°$$

3.2.3 Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_1 passant par $M(2;1)$ et déterminant avec la droite $d_2 : 2x+3y+4=0$ un angle $\measuredangle(d_1;d_2) = -45^\circ$.



$(d_2) : 2x + 3y + 4 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-2x}{3} - \frac{4}{3}$

$\Rightarrow m_2 = \frac{-2}{3}$

$(d_1) : y = m_1 x + h$

On sait que : $\tan(\varphi) = -1 = \dfrac{-\frac{2}{3} - m_1}{1 - \frac{2m_1}{3}} = -1$

$(\tan(-45^\circ) = -1)$

$\Rightarrow \frac{2}{3} + m_1 = 1 - \frac{2m_1}{3} \iff 2 + 3m_1 = 3 - 2m_1$

$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{5}$

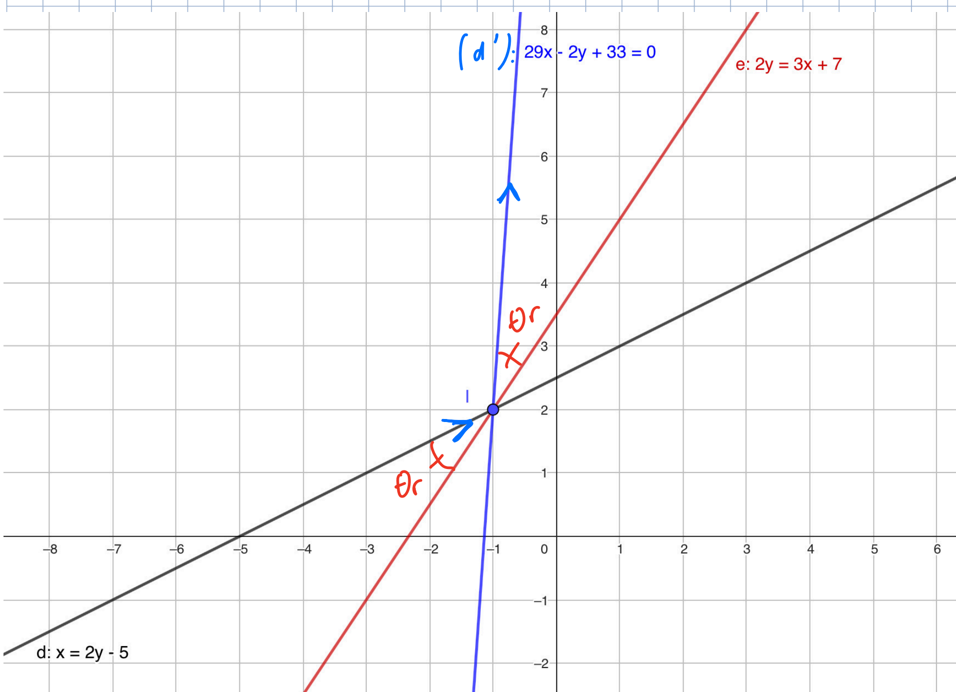
$\Rightarrow (d_1) : y = \frac{1}{5}x + h \Rightarrow (d_1)$ passe par M

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{5} \cdot 2 + h \Rightarrow h = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow (d_1) : y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Rightarrow 5y = x + 3$

$\Rightarrow (d_1) : \underline{x - 5y + 3 = 0}$

3.2.4 Un rayon lumineux parcourt la droite $d : x = 2y - 5$, et il se réfléchit sur la droite $e : 2y = 3x + 7$. Quelle est l'équation cartésienne du rayon réfléchi ?



(d) : rayon incident

(d') : rayon réfléchi

θ_i : angle d'incidence

θ_r : angle de réflexion

$$I = (d) \cap (e) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ 2y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I\,(-1 ; 2)$$

$$(d) : y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

$$(e) : y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \rightarrow m_e = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_i) = \left| \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4}} \right|$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_i) = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} = \tan(\theta_r)$$

θ_r : angle entre (e) et (d') où m = pente de (d')

et (d') : l'équation du rayon réfléchi

$$\Rightarrow \frac{4}{7} = \left| \frac{m - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}m} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}m} = \pm\frac{4}{7} \iff m-\frac{3}{2} = \pm\frac{4}{7}\left(1+\frac{3}{2}m\right)$$

a) $m-\frac{3}{2} = \frac{4}{7}\left(1+\frac{3}{2}m\right) \Rightarrow m = \frac{29}{2}$

$\Rightarrow (d_1') : y = \frac{29}{2}x + h$ et (d_1') passe par $I(-1;2)$

$\Rightarrow 2 = \frac{29}{2}(-1) + h \Rightarrow h = 2 + \frac{29}{2} = \frac{33}{2}$

$\Rightarrow (d_1') : y = \frac{29}{2}x + \frac{33}{2} \iff 2y = 29x + 33$

$\Rightarrow (d_1') : 29x - 2y + 33 = 0$

b) $m-\frac{3}{2} = -\frac{4}{7}\left(1+\frac{3}{2}m\right) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (d_2') : y = \frac{1}{2}x + h$ $\rightarrow$ correspond à la droite que nous avons déjà : d

Donc l'équation du rayon réfléchie est :

$$(d') : 29x - 2y + 33 = 0$$

3.2.5 Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a) $P(2;-1)$ $\quad d: 4x+3y+10=0$

b) $P(0;-3)$ $\quad d: 5x=12y+23$ $\Rightarrow 5x-12y-23=0$

c) $P(-2;3)$ $\quad d: 4y=3x-2$ $\Rightarrow 3x-4y-2=0$

d) $P(1;-2)$ $\quad d: x=2y+5$ $\Rightarrow x-2y-5=0$

a) $\delta(P;d) = \dfrac{|4\cdot 2+3(-1)+10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{|8-3+10|}{\sqrt{16+9}}$

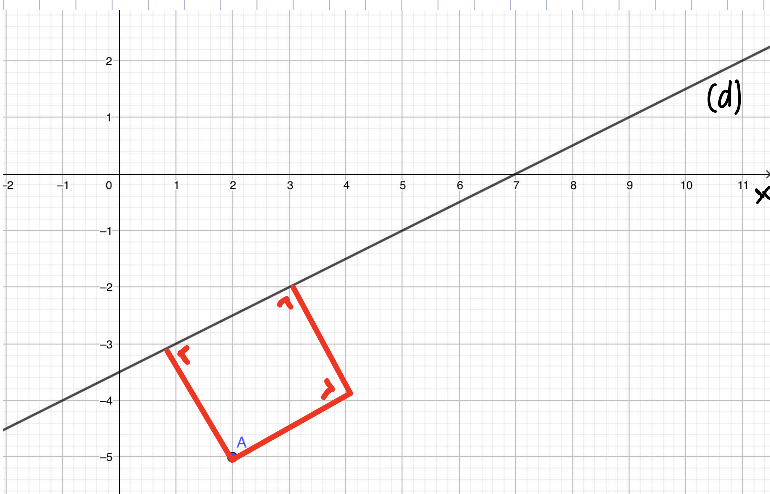
$\Rightarrow \delta(P;d) = \dfrac{15}{5} = \underline{3u}$

b) $\delta(P;d) = \dfrac{|5\cdot 0-12(-3)-23|}{\sqrt{25+144}} = \dfrac{|36-23|}{13} = \underline{1u}$

c) $\delta(P;d) = \dfrac{|-6-12-2|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{20}{5} = \underline{4u}$

d) $\delta(P;d) = \dfrac{|1+4-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \underline{0u} \Rightarrow P\in d$

3.2.6 Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2;-5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $d : x = 2y + 7$.



$(d) : x = 2y + 7 \Rightarrow x - 2y - 7 = 0$

$\delta(A; d) = \dfrac{|2 - 2(-5) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$

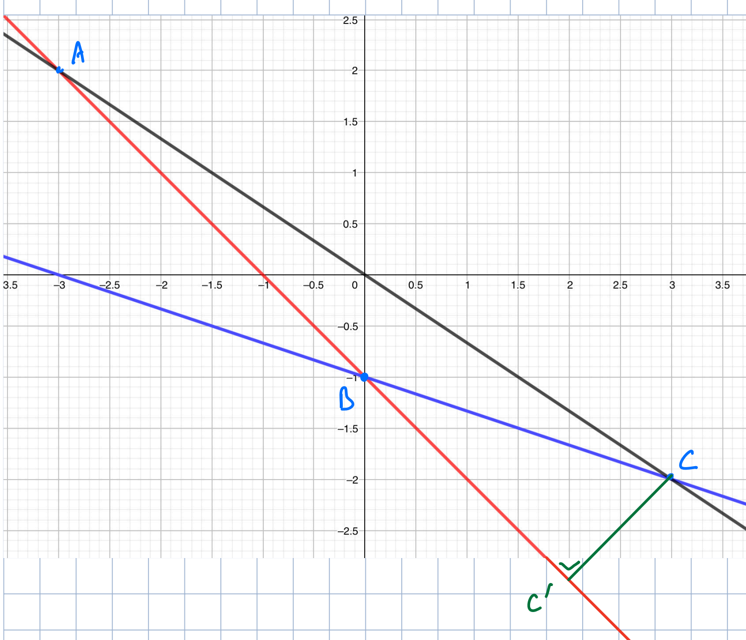
$\delta(A; d) = \dfrac{|2 + 10 - 7|}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{|5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5}$

$\delta(A; d) = \sqrt{5}$

$\Rightarrow A_{\text{carré}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \underline{5 \ u^2}$

3.2.7 Un triangle ABC est déterminé par les équations de ses côtés : $AB : x + y + 1 = 0$, $BC : x + 3y + 3 = 0$ et $AC : 2x + 3y = 0$. Calculer la longueur de sa hauteur issue de C.



CC' est la hauteur issue de C

$C = (BC) \cap (AC) : \begin{cases} x + 3y = -3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $-$

$-x = -3$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -2$

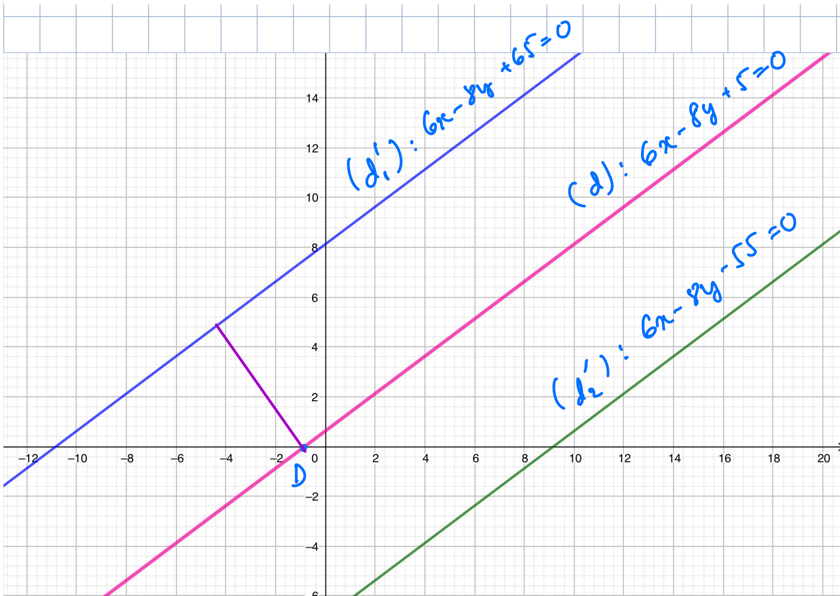
donc $C(3; -2)$

La hauteur $CC' = \delta(C; (AB))$

$= \dfrac{|3 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Donc $\underline{CC' = \sqrt{2} \ u}$

3.2.8 Quelles sont les équations cartésiennes des droites situées à une distance de 6 de la droite $d : 6x - 8y + 5 = 0$?



Point $D \in (d)$

$\Rightarrow D\left(-\frac{5}{6} ; 0\right)$

La droite $(d') \parallel (d)$

$\Rightarrow (d') : 6x - 8y + c = 0$

$$\delta(D ; d') = \frac{\left|6 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - 8 \cdot 0 + c\right|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$\delta(D ; d') = \frac{|-5 + c|}{\sqrt{100}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{|c-5|}{10} = 6 \Leftrightarrow |c-5| = 60 \Leftrightarrow c - 5 = \pm 60$$

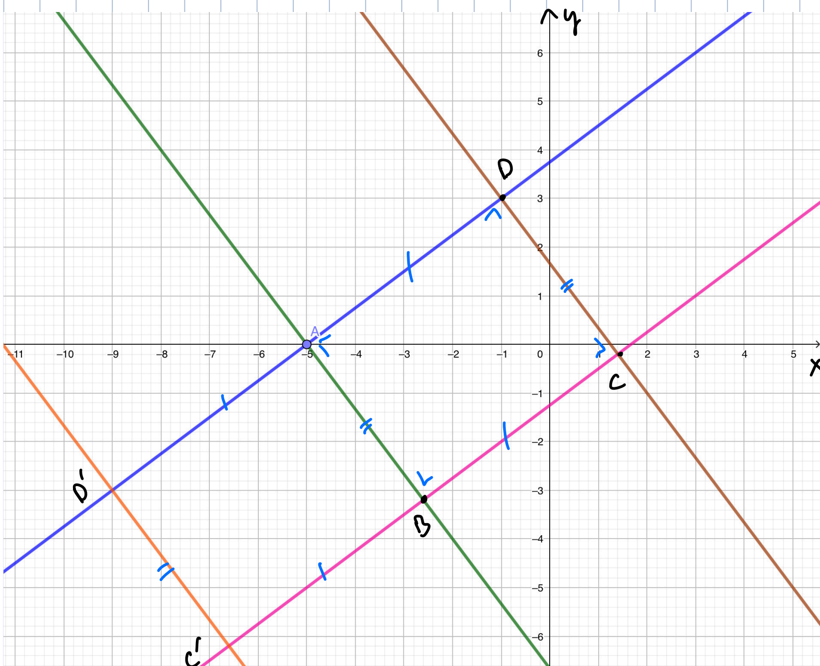
i) si $c - 5 = 60 \Rightarrow c = 65$

$\Rightarrow (d'_1) : 6x - 8y + 65 = 0$

ii) si $c - 5 = -60 \Rightarrow c = -55$

$\Rightarrow (d'_2) : 6x - 8y - 55 = 0$

3.2.9 Le point $A(-5;0)$ est le sommet d'un rectangle $ABCD$ d'aire 20 dont le côté BC est porté par la droite $d : 3x - 4y - 5 = 0$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et CD.



* $(AD) \parallel (BC)$

$\Rightarrow (AD) : 3x - 4y + c_1 = 0$

$A \in (AD)$

$\Rightarrow 3\cdot(-5) - 4\cdot 0 + c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = 15$

$\Rightarrow (AD) : 3x - 4y + 15 = 0$

* $(AB) \perp (BC)$

$\Rightarrow (AB) : -4x - 3y + c_2 = 0$

$A \in (AB)$

$\Rightarrow -4\cdot(-5) - 3\cdot 0 + c_2 = 0$

$\Rightarrow c_2 = -20$

$\Rightarrow (AB) : -4x - 3y - 20 = 0$ ou $(AB) : 4x + 3y + 20 = 0$

* $\delta(A;BC) = \dfrac{|3\cdot(-5) - 4\cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-15-5|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|-20|}{5}$

$\Rightarrow \delta(A;BC) = \dfrac{20}{5} = 4\ u$ (u : unité de longueur)

$\Rightarrow \delta(A;CD) = 5\ u$ (car $A_{ABCD} = 20\ u^2$)

* $(CD) \parallel (AB) \Rightarrow (CD) : 4x + 3y + c_3 = 0$

On sait que $\delta(A;CD) = \dfrac{|4\cdot(-5) + 3\cdot 0 + c_3|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 5 \Rightarrow \dfrac{|-20 + c_3|}{5} = 5$

$\Rightarrow \quad |-20 + c_3| = 25 \quad \Rightarrow \quad c_3 - 20 = \pm 25$

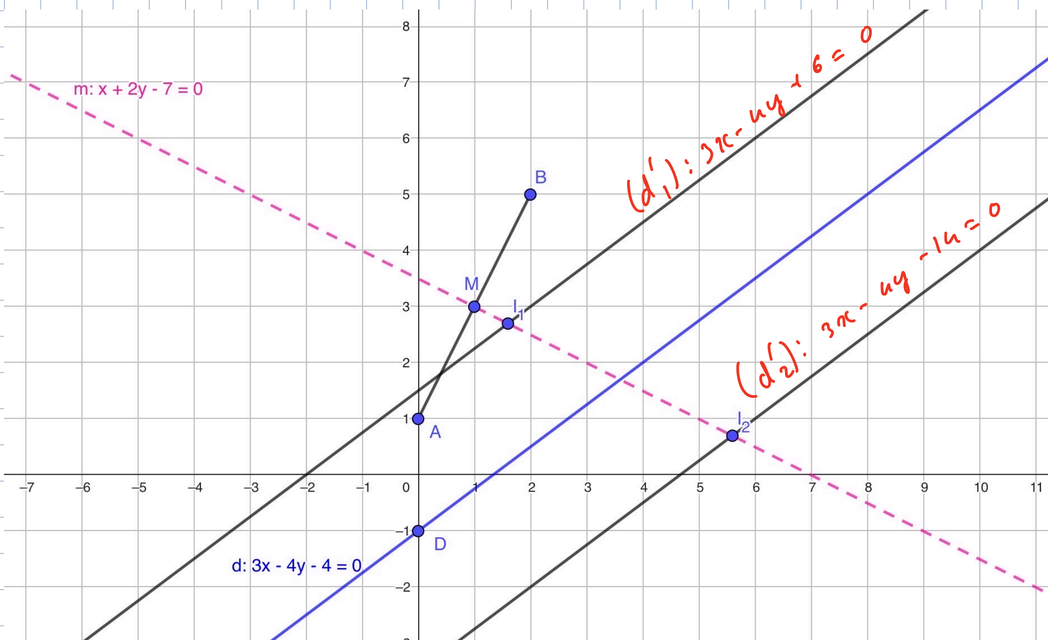
i) si $c_3 - 20 = 25 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 45$

$\Rightarrow \quad (C'D') : \quad 4x + 3y + 45 = 0$

ii) si $c_3 - 20 = -25 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 20 - 25 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -5$

$\Rightarrow \quad (CD) : \quad 4x + 3y - 5 = 0$

3.2.10 Trouver les points équidistants des points $A(0;1)$ et $B(2;5)$, qui sont situés à une distance de 2 de la droite $d : 3x - 4y - 4 = 0$.



Les points cherchés sont sur la médiatrice de AB.

$$\Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}_{(m_{AB})}$$

$$\Rightarrow (m_{AB}) : \quad x + 2y + c = 0$$

M est le milieu de AB $\Rightarrow M(1;3)$

$\Rightarrow (m_{AB})$ passe par M $\Rightarrow 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -7$

$$\Rightarrow (m_{AB}) : \quad x + 2y - 7 = 0$$

Appelons les points cherchés : $I(x;y)$

$$\Rightarrow \delta(I;d) = 2 \Rightarrow \frac{|3x - 4y - 4|}{\underbrace{\sqrt{9+16}}_{=5}} = 2$$

$\Rightarrow \quad |3x - 4y - 4| = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y - 4 = \pm 10$

$\Rightarrow \quad 3x - 4y - 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y - 14 = 0 \quad (d'_2)$

et $\quad 3x - 4y - 4 = -10 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y + 6 = 0 \quad (d'_1)$

* Pour trouver les intersections cherchées, c-à-d les points I, il suffit de résoudre les 2 systèmes suivants :

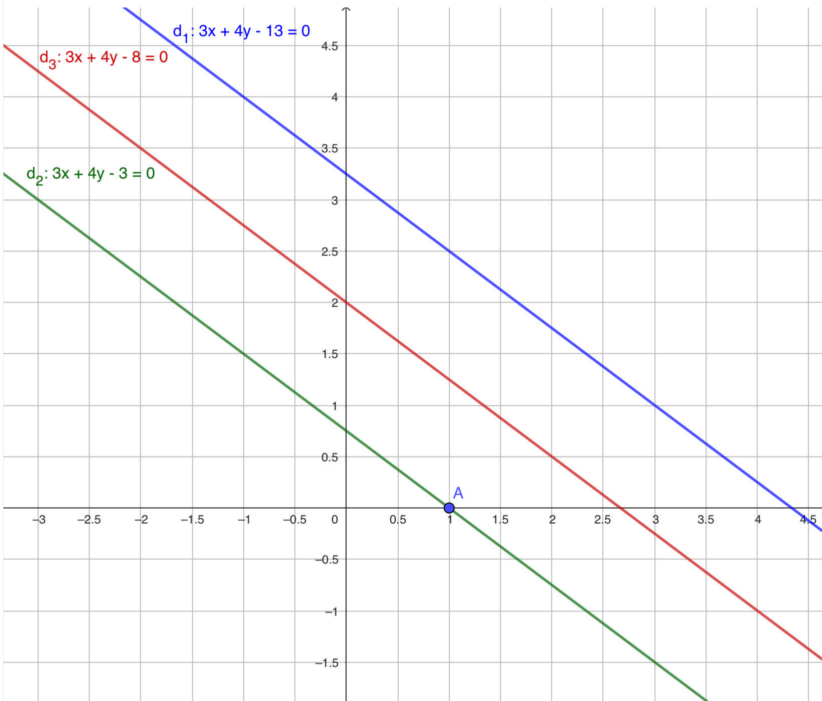
$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{27}{10} \end{cases} \rightarrow I_1\left(\frac{8}{5} ; \frac{27}{10}\right)$$

et $$\begin{cases} 3x - 4y - 14 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{7}{10} \end{cases} \rightarrow I_2\left(\frac{28}{5} ; \frac{7}{10}\right)$$

Les points cherchés sont donc :

$I_1\left(\frac{8}{5} ; \frac{27}{10}\right)$ et $I_2\left(\frac{28}{5} ; \frac{7}{10}\right)$

3.2.11 Calculer la distance entre les deux droites parallèles $d_1 : 3x + 4y - 13 = 0$ et $d_2 : 3x + 4y - 3 = 0$, puis déterminer l'équation cartésienne de la droite équidistante de d_1 et d_2.



$A(1;0) \in (d_2) \Rightarrow \delta(d_1;d_2) = \delta(A;d_1) = \dfrac{|3\cdot 1 + 4\cdot 0 - 13|}{\sqrt{9+16}}$

$\Rightarrow \delta(d_1;d_2) = \dfrac{10}{5} = 2\,u$

On calcule ensuite l'équation de la bissectrice de ces 2 droites d_1 et d_2 :

$$\frac{|3x+4y-13|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4y-3|}{\sqrt{25}}$$

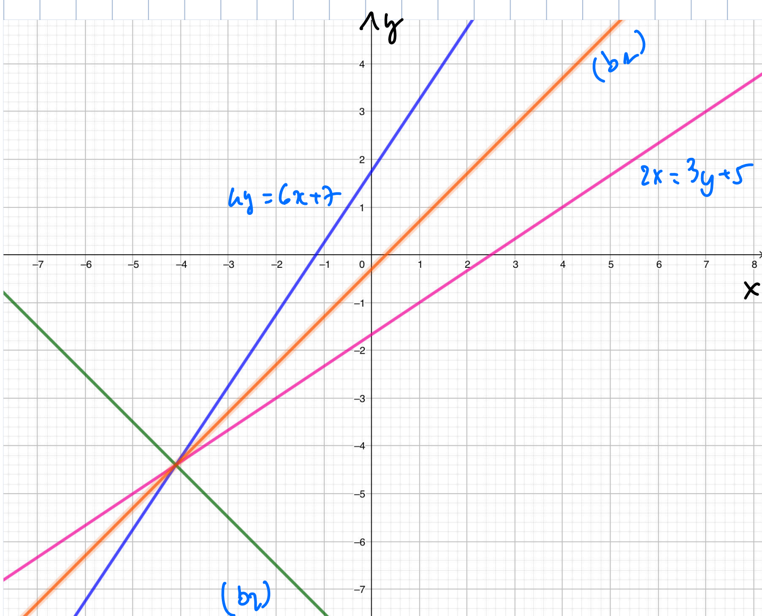
$\Rightarrow |3x+4y-13| = |3x+4y-3| \Rightarrow 3x+4y-13 = \pm(3x+4y-3)$

- $3x+4y-13 = 3x+4y-3 \Rightarrow -13 = -3$ NON
- $3x+4y-13 = -(3x+4y-3) \Rightarrow 3x+4y-13 = -3x-4y+3$

$\Rightarrow 6x+8y-16 = 0 \Rightarrow (d_3) : 3x+4y-8 = 0$

$\Rightarrow$ L'équation de la droite équidistante de d_1 et d_2 est : $3x+4y-8=0$

3.2.12 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y + 5$ et $4y = 6x + 7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.



La bissectrice recherchée coupe l'axe Ox "dans sa partie négative"

$\Rightarrow$ une droite de pente négative

$$\frac{2x-3y-5}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \pm \frac{6x-4y+7}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3y-5}{\sqrt{13}} = \pm \frac{6x-4y+7}{2\sqrt{13}}$$

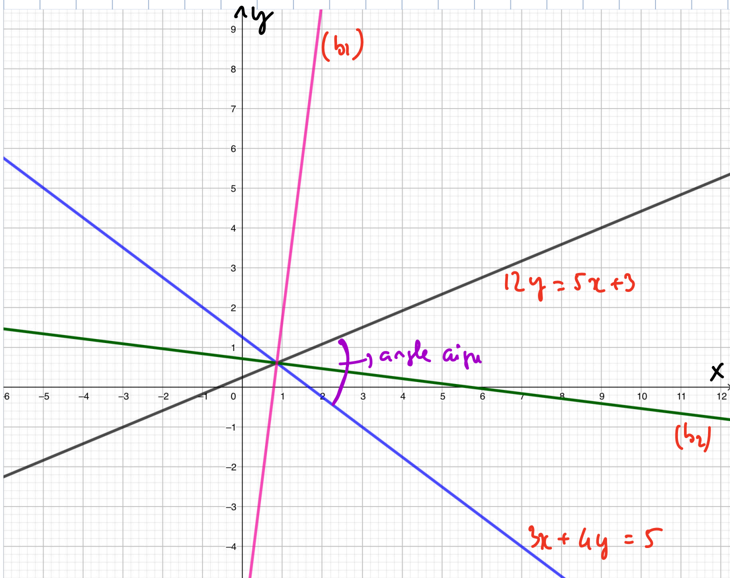
$$\Rightarrow 4x-6y-10 = \pm(6x-4y+7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+17=0 & (\text{pente négative}) \ (b_2) \\ 10x-10y-3=0 & (\text{pente positive}) \ (b_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la bissectrice recherchée : $(b_2) : 2x+2y+17=0$

(car $2y = -2x - 17$
$y = -x - \frac{17}{2}$
(pente négative))

3.2.13 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle aigu déterminé par les droites d'équation $3x + 4y = 5$ et $12y = 5x + 3$.



La bissectrice recherchée est la droite de pente négative

$$\frac{3x+4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm \frac{5x-12y+3}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y-5}{5} = \pm \frac{5x-12y+3}{13}$$

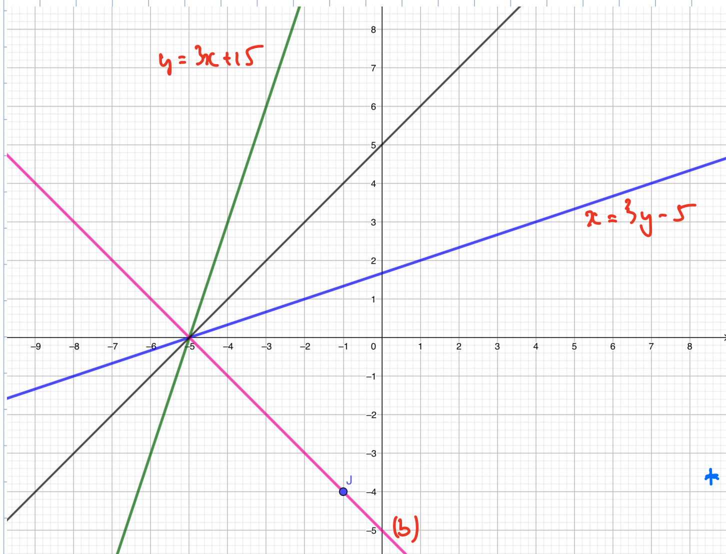
$$\Rightarrow 39x+52y-65 = \pm(25x-60y+15)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x+112y-80=0 & (\text{pente} <0) \\ 64x-8y-50=0 & (\text{pente} >0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bissectrice recherchée : (b_2) : $14x+112y-80=0$

ou (b_2) : $7x+56y-40=0$

3.2.14 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice déterminé par les droites d'équation $x = 3y - 5$ et $y = 3x + 15$ et qui passe par le point $J(-1; -4)$.



équations des bissectrices :

$$\frac{x-3y+5}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \pm \frac{3x-y+15}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3y+5}{\sqrt{10}} = \pm \frac{3x-y+15}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow x-3y+5 = \pm (3x-y+15)$$

+ $\Rightarrow (b): 2x+2y+10=0$

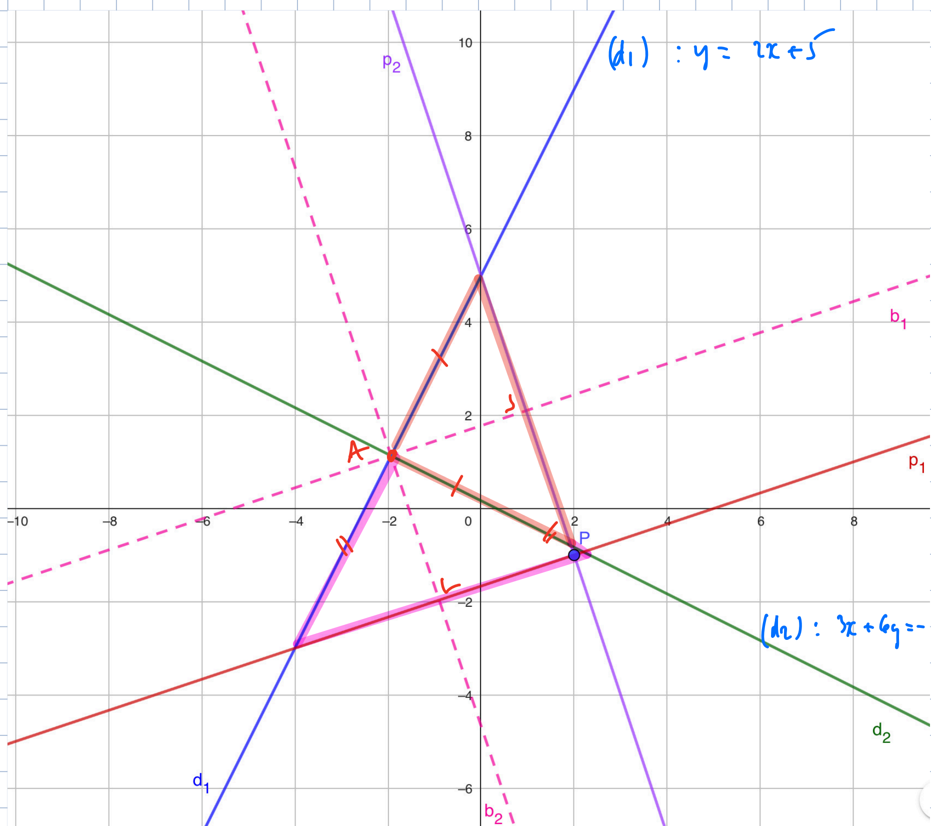
$J \in (b)$? : $2(-1)+2(-4)+10=0$ ✓

* $(b'): 4x-4y+20=0$

$J \in (b')$? : $4\cdot(-1)-4(-4)+20 = -4+16+20 \neq 0$

Donc la bissectrice recherchée est $(b) : x+y+5=0$

3.2.15 Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par $P(2;-1)$ et qui forment avec les droites d'équation $y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$ des triangles isocèles en l'intersection de ces droites.



Soit b_1 et b_2 les bissectrices des droites d_1 et d_2.

Vu que la bissectrice et la hauteur issues du sommet A d'un triangle isocèle de sommet A sont confondues, les droites cherchées sont p_1 et p_2, les perpendiculaires à b_1 et b_2 passant par P.

$\Rightarrow$ on cherche les équations de b_1 et b_2 :

$$\frac{|2x - y + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x + 6y - 1|}{\sqrt{45}} \iff \sqrt{45}\,(2x - y + 5) = \pm\sqrt{5}\,(3x + 6y - 1)$$

$$\iff (2x - y + 5)\,3\sqrt{5} = \pm\sqrt{5}\,(3x + 6y - 1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{6x - 3y + 15 = 3x + 6y - 1}_{(b_1):\ 3x - 9y + 16 = 0} \quad \text{ou} \quad \underbrace{6x - 3y + 15 = -3x - 6y + 1}_{(b_2):\ 9x + 3y + 14 = 0}$$

* $p_2 \perp b_1 \Rightarrow (p_2) : -9x - 3y + c = 0$

(p_2) passe par $P \Rightarrow -9 \cdot 2 - 3(-1) + c = 0$

$\Rightarrow -18 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = 15$

$\Rightarrow (p_2) : -9x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow (p_2) : 3x + y - 5 = 0$

* $p_1 \perp b_2 \Rightarrow (p_1) : 3x - 9y + c = 0$

(p_1) passe par $P(2;-1) \Rightarrow 3 \cdot 2 - 9(-1) + c = 0$

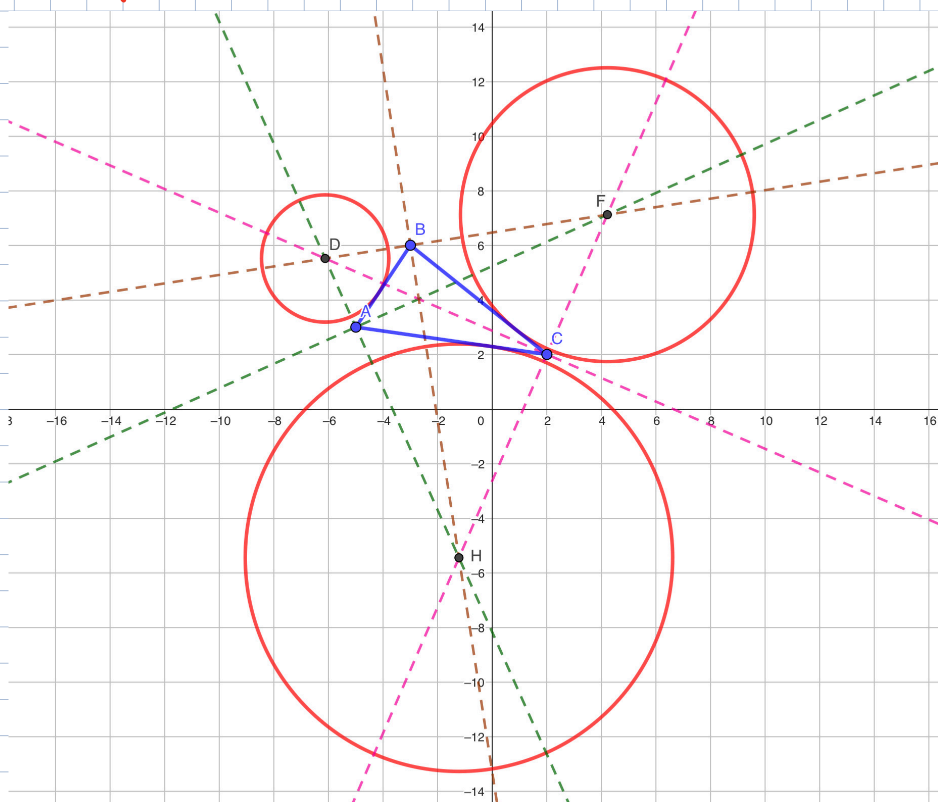
$\Rightarrow c = -15$

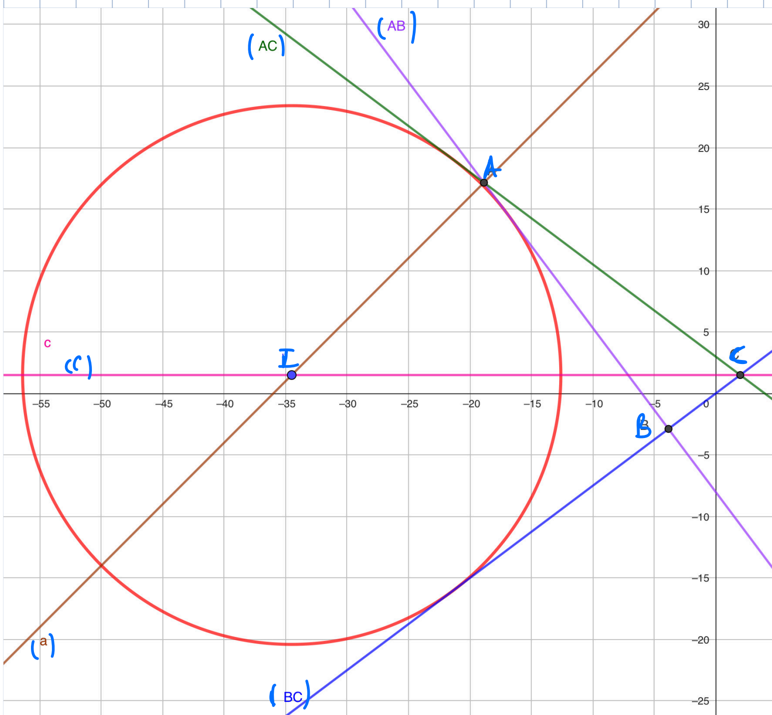
$\Rightarrow (p_1) : 3x - 9y - 15 = 0 \Rightarrow (p_1) : x - 3y - 5 = 0$

3.2.16 Un triangle ABC est déterminé par les équations de ses côtés : $AB : 4x + 3y + 24 = 0$, $BC : 3x = 4y$ et $AC : 3x + 4y = 12$. Calculer les coordonnées du centre du cercle exinscrit du triangle dont le centre se trouve sur la bissectrice intérieure issue de C.

* Un cercle exinscrit d'un triangle est un cercle qui est tangent aux droites supportant les côtés du triangle, mais qui n'est pas le cercle inscrit.
* Le centre du cercle exinscrit est l'intersection de la bissectrice intérieure de l'un des sommets du triangle, et des bissectrices extérieures des deux autres sommets.

$\Rightarrow$ il y a trois cercles exinscrits.





(C) : bissectrice intérieure issue de C.

(a) : bissectrice extérieure issue de A.

* On cherche la bissectrice issue de C :

$$\frac{3x+4y-12}{\cancel{\sqrt{9+16}}} = \pm \frac{3x-4y}{\cancel{\sqrt{9+16}}} \iff 3x+4y-12 = \pm(3x-4y)$$

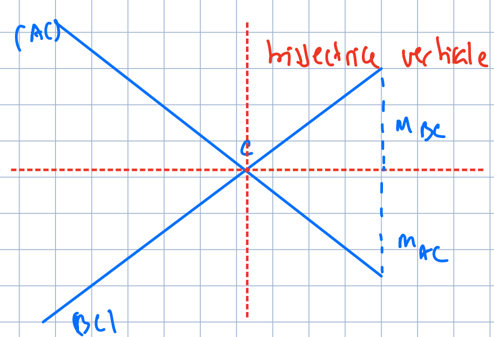
$\Rightarrow$ • $3x+4y-12 = 3x-4y$

$8y = 12 \iff y = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ horizontale

• $3x+4y-12 = -3x+4y$

$\Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$ verticale

$\Rightarrow$ En termes de pente : $m_{AC} = -\frac{3}{4}$, $m_{BC} = \frac{3}{4}$



pour savoir laquelle des bissectrices est interne, il nous faut les coordonnées des sommets.

- $C = (AC) \cap (BC)$: $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

$6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow C\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$

- $B = (BC) \cap (AB)$: $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x + 3y + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{96}{25} \\ y = -\frac{72}{25} \end{cases}$

- $A = (AC) \cap (AB)$: $\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 4x + 3y + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{132}{7} \\ y = \frac{120}{7} \end{cases}$

$\Rightarrow$ La bissectrice intérieure est donc la droite horizontale : $y = \frac{3}{2}$

* Reste à trouver le point de la bissectrice extérieure issue de A donc $y = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 4x + 3y + 24 = \pm (3x + 4y - 12)$

$\Rightarrow x - y + 36 = 0$ ou $7x + 7y + 12 = 0$

En posant $y = \frac{3}{2}$, cela donne :

$x = -36 + \frac{3}{2} = -\frac{69}{2} = -34,5 \to I\left(-\frac{69}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

et avec : $7x + 7y + 12 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}\left(\frac{21}{2} + 12\right) = -\frac{45}{14}$

Vu le dessin, on voit que c'est le point $I\left(-\frac{69}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ qui est à l'extérieur du Δ ABC, c'est donc le centre du cercle exinscrit du Δ ABC, dont le centre se trouve sur la bissectrice intérieure issue de C.

! On peut aussi déterminer la bissectrice extérieure issue de A est la droite ayant la pente > 0

$$\Rightarrow \frac{4x + 3y + 24}{\sqrt{16+9}} = \pm \frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 24 = \pm\ 3x + 4y - 12 \Rightarrow \begin{cases} x - y + 36 = 0 & \text{pente } + \\ 7x + 7y + 12 = 0 & \text{pente } - \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bissectrice extérieure issue de A : (a) $x - y + 36 = 0$

$\Rightarrow$ centre du cercle exinscrit : $I = (a) \cap (C) : \begin{cases} x - y + 36 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{69}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$