CORRIGÉ

3.1.2 Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 1 - 5k \\ y &= 2 + 3k \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$?

$$(6; -1),\ (3; -2),\ (1; 0),\ \left(-6; \frac{31}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 - 5k & \Big| \cdot 3 \\ y = 2 + 3k & \Big| \cdot 5 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 - 15k \\ 5y = 10 + 15k \end{cases}$$

$$3x + 5y = 13 \Rightarrow (d) : \underline{3x + 5y = 13}$$

* $(6; -1) \in d$ car $18 - 5 = 13$ ✓
* $(3; -2) \notin d$ car $9 - 10 = -1$ ✗
* $(1; 0) \notin d$ car $3 + 0 = 3$ ✗
* $\left(-6; \frac{31}{5}\right) \in d$ car $-18 + 31 = 13$ ✓

3.1.3 On donne la droite d'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) situé sur Ox,

b) situé sur Oy,

c) qui a une abscisse égale à 7,

d) qui a une ordonnée égale à -2,

e) dont les deux coordonnées sont égales,

f) situé sur la droite $\begin{cases} x &= 1 + l \\ y &= -5 - 8l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$.

a) situé sur Ox $\Rightarrow$ $y = 0$

$\Rightarrow$ $5 + 2K = 0$ $\Rightarrow$ $K = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ $x = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{9}{2} ; 0\right)$

b) situé sur Oy $\Rightarrow$ $x = 0$

$\Rightarrow$ $2 - K = 0$ $\Rightarrow$ $K = 2$ $\Rightarrow$ $(0 ; 9)$

$\Rightarrow$ $y = 5 + 4 = 9$

c) a une abscisse égale à 7 $\Rightarrow$ $x = 7$

$\Rightarrow$ $2 - K = 7$ $\Rightarrow$ $K = -5$ $\Rightarrow$ $(7 ; -5)$

$\Rightarrow$ $y = 5 - 10 = -5$

d) qui a une ordonnée égale à -2 $\Rightarrow$ $y = -2$

$\Rightarrow$ $5 + 2K = -2$ $\Rightarrow$ $K = -\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{11}{2} ; -2\right)$

$\Rightarrow$ $x = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$

e) deux coordonnées sont égales $\Rightarrow$ $x = y$ $\Leftrightarrow$ $2 - K = 5 + 2K$ $\Rightarrow$ $K = -1$

$\Rightarrow$ $x = y = 3$ $\Rightarrow$ $(3 ; 3)$

g) situé sur la droite $\begin{cases} x = 1 + l \\ y = -5 - 8l \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 - k = 1 + l \\ 5 + 2k = -5 - 8l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k - l = -1 \\ 2k + 8l = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k - 2l = -2 \\ 2k + 8l = -10 \end{cases}$

$6l = -12$

$\Rightarrow l = -2 \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow y = 11$ $\Rightarrow (-1 ; 11)$

3.1.4 Trouver une équation paramétrique de la droite donnée par :

a) $A(3;5)$ et un vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$,

c) $A(2;-4)$, de pente $-\frac{3}{4}$,

d) $A(5;2)$, parallèle au segment BC, où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$,

e) $A(-7;10)$, perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$,

f) $A(0;-2)$, horizontale,

g) $A(8;12)$, verticale.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{point } A} + k \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ -5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}$

c) pente $= m = -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$, avec $k \in \mathbb{R}$

d) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

parallèle à BC $\rightarrow$ même vecteur directeur

$\Rightarrow$ $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}$, avec $k \in \mathbb{R}$

e) perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}}$, avec $k \in \mathbb{R}$

f) horizontale $\Rightarrow$ pente $= 0$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, avec $k \in \mathbb{R}$

g) verticale $\Rightarrow$ pente $= \infty$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$, avec $k \in \mathbb{R}$

3.1.5 Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation cartésienne
(d) : $3x - 8y + 2 = 0$?

$$\left(0; \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{2}{3}; 0\right), (5; -1), (2; 1)$$

* $0 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \left(0 ; \frac{1}{4}\right) \in (d)$

* $3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) - 0 + 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{-2}{3} ; 0\right) \in (d)$

* $15 + 8 + 2 = 25 \Rightarrow (5 ; -1) \notin (d)$

* $6 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow (2 ; 1) \in (d)$

3.1.6 On donne la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y - 6 = 0$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) d'abscisse 3,
b) d'ordonnée -4,
c) dont les deux coordonnées sont égales,
d) situé sur Ox,
e) situé sur Oy,
f) situé sur la droite d'équation cartésienne $5x - 7y + 4 = 0$.

a) $x = 3 \Rightarrow -9 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{2} \Rightarrow \underline{\left(3 ; \frac{15}{2}\right)}$

b) $y = -4 \Rightarrow -3x - 8 - 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{14}{3} \Rightarrow \underline{\left(-\frac{14}{3} ; -4\right)}$

c) $-3x + \underbrace{2x}_{\text{car } x = y} - 6 = 0 \Rightarrow x = y = -6 \Rightarrow \underline{(-6 ; -6)}$

d) $y = 0 \Rightarrow -3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{(-2 ; 0)}$

e) $x = 0 \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \underline{(0 ; 3)}$

f) c'est l'intersection entre 2 droites $\Rightarrow \begin{cases} -3x+2y-6=0 & \cdot 5 \\ 5x-7y+4=0 & \cdot 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -15x+10y = 30 \\ 15x-21y=-12 \end{cases}$$

$$-11y = 18$$

$$\Rightarrow y = -\frac{18}{11} \Rightarrow x = \frac{1}{5}\left(-4-\frac{126}{11}\right) = -\frac{34}{11}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{34}{11} ; -\frac{18}{11}\right)$$

3.1.7 Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites de l'exercice 3.1.4.

$ax+by+c=0$

a) $\begin{cases} x = 3-4k \\ y = 5+k & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-4k \\ 4y = 20+4k \end{cases}$

$x+4y = 23 \Rightarrow x+4y-23=0$

b) $\begin{cases} x = -3+7k & \cdot 3 \\ y = -2-3k & \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -9+21k \\ 7y = -14-21k \end{cases}$

$3x+7y = -23 \Rightarrow 3x+7y+23=0$

c) $\begin{cases} x = 2+4k & \cdot 3 \\ y = -4-3k & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6+12k \\ 4y = -16-12k \end{cases}$

$3x+4y = -10 \Rightarrow 3x+4y+10=0$

d) $\begin{cases} x = 5-4k \\ y = 2+k & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5-4k \\ 4y = 8+4k \end{cases}$

$x+4y = 13 \Rightarrow x+4y-13=0$

e) $\begin{cases} x = -7 + 5k \\ y = 10 + 8k \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot(-5) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{r} 8x = -56 + 40k \\ -5y = -50 - 40k \\ \hline \end{array}$

$8x - 5y = -106 \Rightarrow \underline{8x + 5y + 106 = 0}$

f) $y = -2 \Rightarrow \underline{y + 2 = 0}$

g) $x = 8 \Rightarrow \underline{x - 8 = 0}$

3.1.10 Calculer la pente de la droite d'équation $5x + 7y - 21 = 0$.

$(d) : 5x + 7y - 21 = 0$

$\Rightarrow 7y = -5x + 21$

$y = -\frac{5}{7}x + \frac{21}{7}$

$y = -\frac{5}{7}x + 3 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{5}{7}}$

ou : $ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{a}{-b}$

$\Rightarrow$ ici : $5x + 7y - 21 = 0 \Rightarrow m = \frac{a}{-b} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$

3.1.11 Calculer l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $5x - 8y + 56 = 0$.

$(d) : 5x - 8y + 56 = 0$

$\Rightarrow -8y = -5x - 56$

$y = \frac{-5}{-8}x - \frac{56}{-8}$

$y = \frac{5}{8}x + \underbrace{7}_{h = 7}$

$\underline{h = 7}$

3.1.12 Déterminer un vecteur directeur et la pente des droites suivantes, données par leurs équations :

a) $5x - 6y - 7 = 0$

b) $x + y - 5 = 0$

c) $4x - 3y = 0$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{15} = 0$

e) $\sqrt{5}x - 4y - 5 = 0$

f) $3y - 8 = 0$

g) $x = 0$

h) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{4}$

a) $5x - 6y - 7 = 0$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$m = \dfrac{a}{-b} = \dfrac{5}{-(-6)} = \dfrac{5}{6}$

b) $x + y - 5 = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $m = -1$

c) $4x - 3y = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $m = \dfrac{4}{3}$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{15} = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $m = 1$

e) $\sqrt{5}x - 4y - 5 = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $m = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$

f) $3y - 8 = 0 \iff 0x + 3y - 8 = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $m = 0$

g) $x = 0 \iff 1\cdot x + 0y + 0 = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $m = \infty$: droite verticale

h) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{4} \iff 4(x+2) = 5(y-3)$

$\Rightarrow 4x + 8 = 5y - 15$

$4x - 5y + 8 + 15 = 0$

$4x - 5y + 23 = 0$

$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $m = \dfrac{4}{5}$

3.1.13 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite.

a) $3x + 2y - 11 = 0$

b) $6x + 4y = 22$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x &= 5 - 2l \\ y &= -2 + 3l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$

e) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$

f) $\dfrac{x-9}{-2} = \dfrac{y+8}{3}$

On transforme ces équations en équations cartésiennes.

$\Rightarrow$ a) $3x + 2y - 11 = 0$

b) $6x + 4y = 22 \Rightarrow 6x + 4y - 22 = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k & \cdot 3 \\ y = 1 - 3k & \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 9 + 6k \\ 2y = 2 - 6k \end{cases}$

$3x + 2y = 11 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$

d) $\begin{cases} x = 5 - 2l & \cdot 3 \\ y = -2 + 3l & \cdot 2 \end{cases}$ avec $l \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 15 - 6\ell \\ 2y = -4 + 6\ell \end{cases}$$

$$3x + 2y = 11 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$$

e) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \Rightarrow 2y = -3x + 11$

$\Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$

f) $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+8}{3} \Leftrightarrow 3(x-9) = -2(y+8)$

$\Rightarrow 3x - 27 = -2y - 16$

$\Rightarrow 3x + 2y - 27 + 16 = 0$

$\Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$

3.1.14 Déterminer, dans chacun des cas, l'équation cartésienne de la parallèle à la droite d passant par A :

a) $d : 7x - 6y = 7$ $\quad A(1;1)$

b) $d : 5x = 5 - 2y$ $\quad A(-2;-1)$

c) $d : y = 9 - 7x$ $\quad A(2;-2)$

$(d) : ax + by + c = 0 \quad (d') \parallel (d) \Rightarrow (d') : ax + by + c' = 0$

a) $(d) : 7x - 6y = 7 \Rightarrow (d) : 7x - 6y - 7 = 0$

$(d') \parallel (d) \Rightarrow (d') : 7x - 6y + c' = 0$

$A \in (d') \Rightarrow 7 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + c' = 0$

$\Rightarrow 7 - 6 + c' = 0 \Rightarrow c' = -1$

$\Rightarrow \boxed{(d') : 7x - 6y - 1 = 0}$

b) $(d) : 5x = 5 - 2y \Rightarrow (d) : 5x + 2y - 5 = 0$

$(d') \parallel (d) \Rightarrow (d') : 5x + 2y + c' = 0$

$A \in (d') \Rightarrow 5 \cdot (-2) + 2(-1) + c' = 0$

$\Rightarrow -10 - 2 + c' = 0 \Rightarrow c' = 12$

$\Rightarrow \boxed{(d') : 5x + 2y + 12 = 0}$

c) $(d) : y = 9 - 7x \Rightarrow (d) : 7x + y - 9 = 0$

$(d') \,//\, (d) \Rightarrow (d') : 7x + y + c' = 0$

$A \in (d') \Rightarrow 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + c' = 0$

$\Rightarrow 14 - 2 + c' = 0 \Rightarrow c' = -12$

$\Rightarrow \boxed{(d') : 7x + y - 12 = 0}$

3.1.15 D'un parallélogramme $ABCD$, on donne le sommet $A(8; 0)$, l'équation du côté $CD :\ x-2y+5 = 0$, ainsi que l'équation de la diagonale $BD : 6x-25y = -43$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et BC.

(Voir fichier Corrigé_3.1.15.pdf sur Teams)

3.1.16

a) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_1 à Ox passant par $A(2; 2)$.

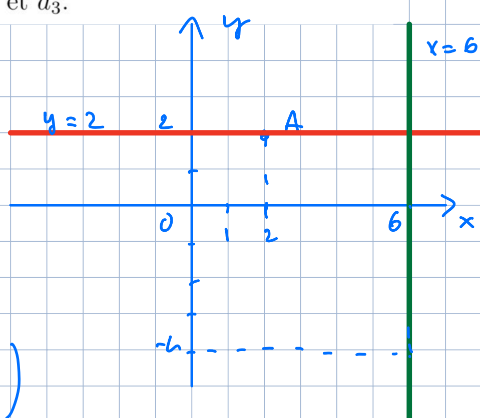
b) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_2 à Oy passant par $B(6; -4)$.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_3 passant par $P(1; 2)$ et par le milieu du segment d'extrémités A et B.

d) Calculer l'aire du triangle formé par les droites d_1, d_2 et d_3.

a) $y = 2 \Rightarrow (d_1) : y - 2 = 0$

b) $x = 6 \Rightarrow (d_2) : x - 6 = 0$



c) M milieu de AB :

$\Rightarrow M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{2 + 6}{2} ; \dfrac{2 - 4}{2}\right) \Rightarrow M(4 ; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = +3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

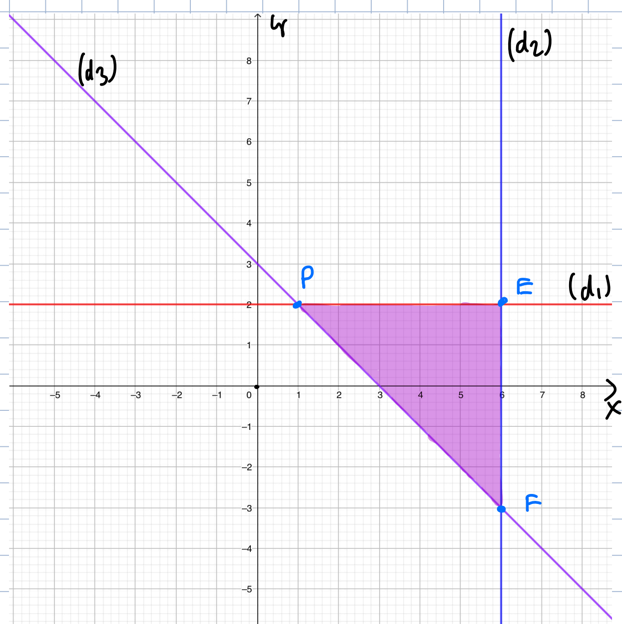
$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (d_3) : x + y + c = 0$

$P \in (d_3) \Rightarrow 1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$

donc $(d_3) : x + y - 3 = 0$

d)



* $(d_1) \cap (d_2) : E(6;2)$
* $(d_1) \cap (d_3) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow P(1;2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{EP}\| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

* $(d_2) \cap (d_3) : x = 6 \Rightarrow y = -3$

$\Rightarrow F(6;-3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

Donc l'aire du Δ EPF $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{EP}\| \cdot \|\overrightarrow{EF}\| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{A_{\Delta EPF} = \frac{25}{2} \ u^2}$$

3.1.17 Déterminer l'équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2;-3)$ et qui est perpendiculaire à :

a) $3x - 7y + 3 = 0$

b) $x + 9y = 11$

c) $16x = 24y - 7$

d) $2x + 3 = 0$

e) $3y = 1$

Rappel : $(d) : ax + by + c = 0$

$(d') \perp (d) \Rightarrow (d') : bx - ay + c' = 0$

a) $(d) : 3x - 7y + 3 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp) : -7x - 3y + c' = 0$

$A \in (d_\perp) \Rightarrow -7 \cdot 2 - 3(-3) + c' = 0$

$\Rightarrow -14 + 9 + c' = 0$

$\Rightarrow c' = 5$

$\Rightarrow (d_\perp) : -7x - 3y + 5 = 0$

$\Rightarrow \underline{7x + 3y - 5 = 0}$

b) $(d) : x + 9y = 11 \Rightarrow (d) : x + 9y - 11 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp) : 9x - y + c' = 0$

$A \in (d_\perp) \Rightarrow 9 \cdot 2 - (-3) + c' = 0$

$\Rightarrow 18 + 3 + c' = 0 \Rightarrow c' = -21$

$\Rightarrow (d_\perp) : \underline{9x - y - 21 = 0}$

c) $(d) : 16x = 24y - 7 \Rightarrow (d) : 16x - 24y + 7 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp) : -24x - 16y + c' = 0$

$A \in (d_\perp) \Rightarrow -24 \cdot 2 - 16 \cdot (-3) + c' = 0$

$\Rightarrow -48 + 48 + c' = 0 \Rightarrow c' = 0$

$\Rightarrow (d_\perp) : -24x - 16y = 0 \Rightarrow (d_\perp) : \underline{3x + 2y = 0}$

d) (d): $2x + 3 = 0 \Rightarrow (d): 2x + 0y + 3 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp): 0x - 2y + c' = 0$

$A \in (d_\perp) \Rightarrow 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + c' = 0$

$\Rightarrow 6 + c' = 0 \Rightarrow c' = -6$

$\Rightarrow (d_\perp): -2y - 6 = 0 \Rightarrow (d_\perp): \underline{y + 3 = 0}$

e) (d): $3y = 1 \Rightarrow (d): 0x + 3y - 1 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp): 3x + 0y + c' = 0$

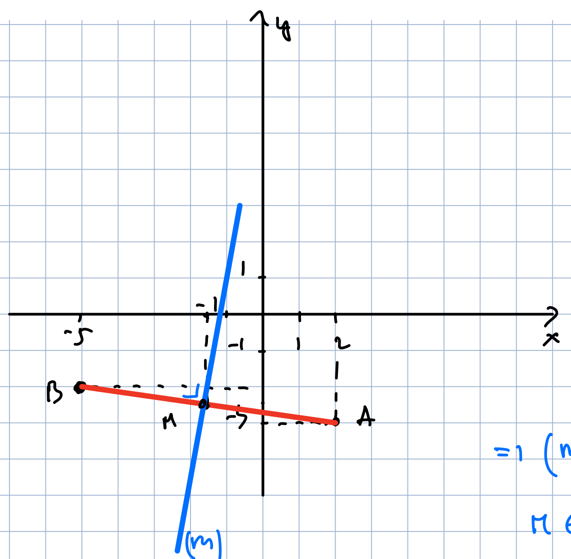
$A \in (d_\perp): 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + c' = 0$

$\Rightarrow 6 + c' = 0 \Rightarrow c' = -6$

$\Rightarrow (d_\perp): 3x - 6 = 0$

$\Rightarrow (d_\perp): \underline{x - 2 = 0}$

3.1.21 Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice d'un segment $[AB]$ si l'on donne $A(2;-3)$ et $B(-5;-2)$.



M milieu de AB

$\Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$\Rightarrow M\left(\frac{2-5}{2} ; \frac{-3-2}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (m): 7x - y + c = 0$

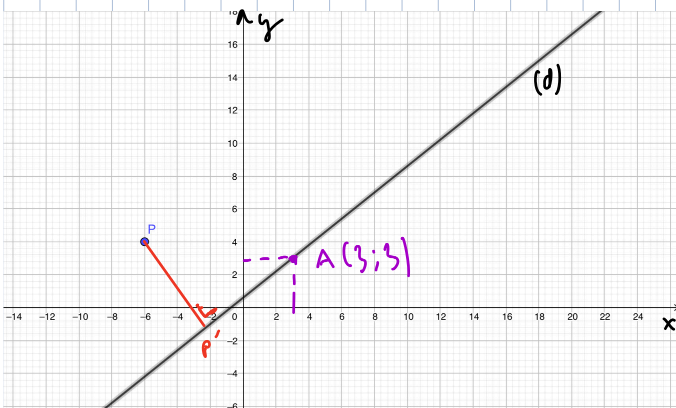
$M \in (m): 7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) + c = 0$

$\Rightarrow -\frac{21}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 8$

$\Rightarrow (m): \underline{7x - y + 8 = 0}$

3.1.18 Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-6;4)$ sur la droite d d'équation $4x = 5y - 3$.

$\Rightarrow (d) : 4x - 5y + 3 = 0$



$P'(x;y)$: projection orthogonale de P

$(PP') \perp$ à $(d) : 4x - 5y + 3 = 0$

$\Rightarrow (PP') : bx - ay + c = 0$

$\Rightarrow (PP') : -5x - 4y + c = 0$

$P \in (PP') : -5(-6) - 4(4) + c = 0$

$\Rightarrow 30 - 16 + c = 0 \Rightarrow c = -14$

$\Rightarrow (PP') : -5x - 4y - 14 = 0$

$$P' = (PP') \cap (d) \Rightarrow \begin{cases} -5x - 4y - 14 = 0 & \cdot 5 \\ 4x - 5y + 3 = 0 & \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{cases} -25x - 20y - 70 = 0 \\ -16x + 20y - 12 = 0 \end{cases}$$

$-25x - 16x - 70 - 12 = 0 \Rightarrow -41x = 82 \Rightarrow x = -2$

$\Rightarrow y = \dfrac{4x+3}{5} = \dfrac{4 \cdot (-2) + 3}{5} = \dfrac{-8+3}{5} = \dfrac{-5}{5} = -1$

D'où $P'(-2;-1)$

* Méthode 2 :

On écrit l'équation de (PP') qui est $\perp$ à (d) :

$(PP') : -5x - 4y + c = 0 \Rightarrow P \in (PP') \Rightarrow c = -14$

$\Rightarrow (PP') : -5x - 4y - 14 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow P'(-2;-1)$

* Méthode 3 :

$$A(3;3) \in (d) \implies \vec{AP} = \begin{pmatrix} -6-3 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \vec{AP}' = \frac{\vec{d} \cdot \vec{AP}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{25+16}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-45+4}{41} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \vec{AP}' = \frac{-41}{41} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \vec{AP}' = \vec{AO} + \vec{OP}' \implies \vec{OP}' = \vec{AP}' - \vec{AO} = \vec{AP}' + \vec{OA}$$

$$\implies \vec{OP}' = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \underline{P'(-2;-1)}$$

* Méthode 4 :

On a
$$\vec{OP}' = \vec{OP} + \vec{PP}' = \vec{OP} - \underbrace{\vec{P'P}}_{\text{projection } \perp \text{ de } \vec{AP} \text{ sur } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

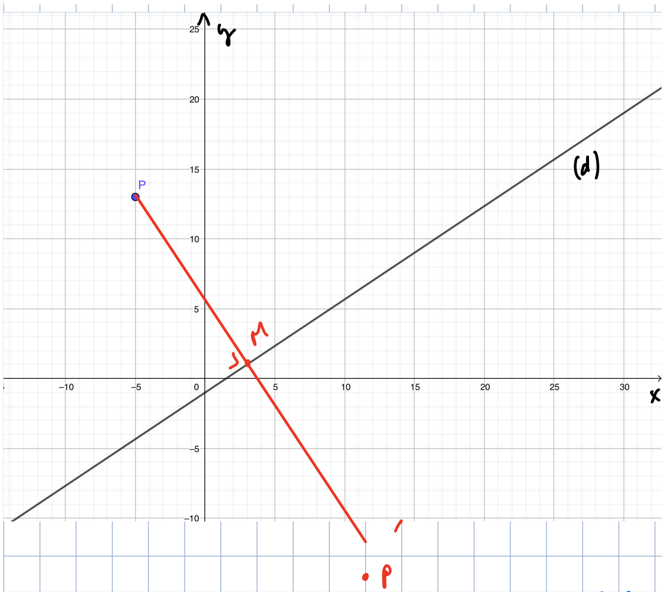
$$\implies \vec{OP}' = \vec{OP} - \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{16+25}\right)^2} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{-41}{41} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \underline{P'(-2;-1)}$$

3.1.19 Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(-5;13)$ relativement à la droite $d : 3y + 3 = 2x$.



$(d) : 3y + 3 = 2x$

$\Rightarrow 2x - 3y - 3 = 0$

$(PP') \perp (d)$

$\Rightarrow (PP') : -3x - 2y + c = 0$

$P \in (PP') \Rightarrow -3(-5) - 2(13) + c = 0$

$\Rightarrow 15 - 26 + c = 0$

$\Rightarrow c = 11$

$\Rightarrow (PP') : -3x - 2y + 11 = 0$

$$M = (PP') \cap (d) \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y + 11 = 0 & \cdot 2 \\ 2x - 3y - 3 = 0 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{cases} -6x - 4y + 22 = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$-4y - 9y + 22 - 9 = 0$$

$$-13y + 13 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y + 3}{2} = \frac{3 \cdot 1 + 3}{2} = 3$$

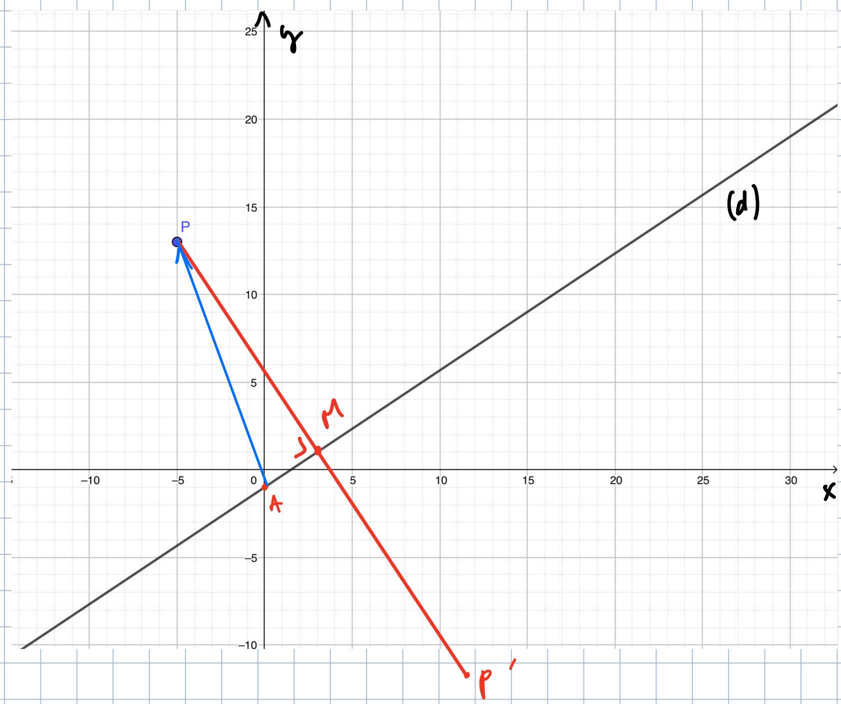
$\Rightarrow M(3;1)$

$$M(3;1) = \left(\frac{x_P + x_{P'}}{2} ; \frac{y_P + y_{P'}}{2}\right) = \left(\frac{-5 + x_{P'}}{2} ; \frac{13 + y_{P'}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-5 + x_{P'}}{2} = 3 \\ \frac{13 + y_{P'}}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 + x_{P'} = 6 \\ 13 + y_{P'} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{P'} = 11 \\ y_{P'} = -11 \end{cases}$$

Donc $P'(11;-11)$

* Autre méthode :



on détermine $A(0;-1) \in (d)$

$\Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} -5-0 \\ 13+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$

$(d) : 2x - 3y - 3 = 0$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = \vec{OP} - \underbrace{\vec{MP}}_{\text{projection orthogonale de } \vec{AP} \text{ sur } \vec{n}}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OP} - \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{4+9}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} - \frac{-52}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M(3;1)$$

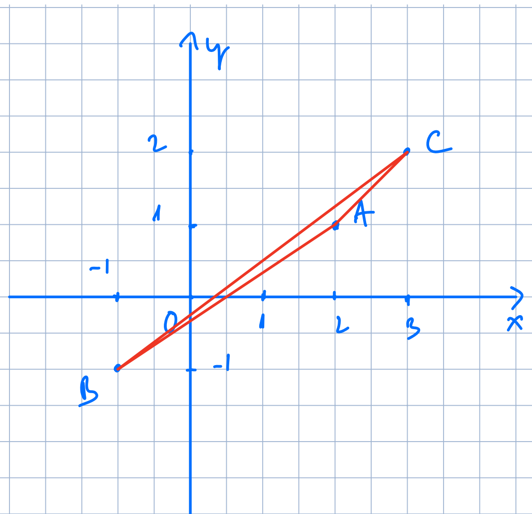
On a également : $\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{PP'} = \vec{OP} + 2\vec{PM}$

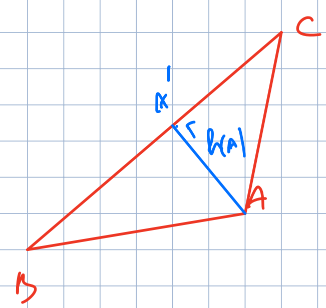
$$\Rightarrow \vec{OP'} = \vec{OP} + 2(\vec{PO} + \vec{OM}) = \vec{OP} + 2\vec{PO} + 2\vec{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{OP'} = \vec{OP} - 2\vec{OP} + 2\vec{OM} = 2\vec{OM} - \vec{OP} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OP'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5 \\ 2-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P'(11;-11)$$

3.1.20 Déterminer les équations cartésiennes des hauteurs du triangle de sommets $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$, ainsi que les coordonnées de son orthocentre.





* $\vec{BC} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -4\\ a = 3\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(BC)} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{n}_{(BC)} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est également le vecteur directeur de la (h_A).

$\Rightarrow \vec{d}_{(h_A)} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (h_A) : -4x - 3y + c_A = 0$

$A \in (h_A) \Rightarrow -4\cdot 2 - 3\cdot 1 + c_A = 0 \Rightarrow -8 - 3 + c_A = 0$

$\Rightarrow c_A = 11$

$\Rightarrow (h_A) : -4x - 3y + 11 = 0 \Rightarrow \underline{(h_A) : 4x + 3y - 11 = 0}$

* $\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -1\\ a = 1\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(AC)} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}_{(AC)} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est également le vecteur directeur de la (h_B).

$\Rightarrow \vec{d}_{(h_B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow (h_B) : -x - y + c_B = 0$

$B \in (h_B) \Rightarrow \underbrace{-(-1)}_{1} \underbrace{-(-1)}_{+\,1} + c_B = 0 \Rightarrow c_B = -2$

$\Rightarrow (h_B) : -x - y - 2 = 0 \Rightarrow \underline{(h_B) : x + y + 2 = 0}$

* $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{(AB)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AB)}$ est également le vecteur directeur de (h_C)

$\vec{d}_{(h_C)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow (h_C) : 3x + 2y + c_C = 0$

$C \in (h_C) \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + c_C = 0 \Rightarrow 13 + c_C = 0$

$\Rightarrow c_C = -13$

$\Rightarrow \underline{(h_C) : 3x + 2y - 13 = 0}$

* H est l'orthocentre $\to$ intersection entre (h_A), (h_B) et (h_C)

ici : $(h_A) \cap (h_C) = H$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 17 \quad , y = -19$

donc $\underline{H(17 ; -19)}$

3.1.21 Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice d'un segment $[AB]$ si l'on donne $A(2;-3)$ et $B(-5;-2)$.

M milieu de AB $\Rightarrow$ $M\left(\frac{2-5}{2} ; \frac{-3-2}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AB)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{d}_{(m)}$

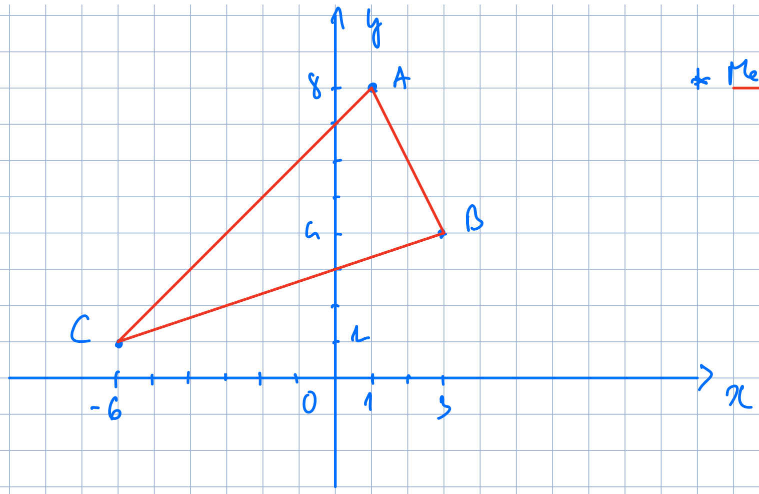
$\Rightarrow (m) : 7x - y + c = 0$

$M \in (m) \Rightarrow 7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) + c = 0$

$\Rightarrow -\frac{21}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{16}{2} = 8$

$\Rightarrow \underline{(m) : 7x - y + 8 = 0}$

3.1.22 Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets $A(1;8), B(3;4)$, $C(-6;1)$, ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.



* Médiatrice de AB :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

milieu de AB : $C'(2;6)$

$\Rightarrow (m_{AB}) : x - 2y + c = 0$

$C' \in (m_{AB}) \Rightarrow 2 - 12 + c = 0$

$\rightarrow c = 10 \Rightarrow (m_{AB}) : x - 2y + 10 = 0$

* médiatrice de AC :

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ milieu de AC : $B'\left(-\frac{5}{2} ; \frac{9}{2}\right)$

$\Rightarrow (m_{AC}) : x + y + c = 0$, $B' \in (m_{AC}) \Rightarrow -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} + c = 0$

$\Rightarrow c = -2 \Rightarrow (m_{AC}) : x + y - 2 = 0$

* médiatrice de BC :

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ milieu de BC : $A'\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow (m_{BC}) : 3x + y + c = 0$, $A' \in (m_{BC}) : -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \rightarrow c = 2$

$\rightarrow (m_{BC}) : 3x + y + 2 = 0$

* Centre du cercle circonscrit : $(m_{AB}) \cap (m_{AC}) = \{K\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -10 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow K(-2;4)$$

* Rayon du cercle circonscrit : $r = \|\vec{AK}\| \Rightarrow \vec{AK} = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|\vec{AK}\| = r = \sqrt{9+16} = 5$

3.1.22 Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets $A(1;8), B(3;4), C(-6;1)$, ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.

* M milieu de AB : $M\left(\frac{1+3}{2}\ ;\ \frac{8+4}{2}\right) \Rightarrow M(2\,;6)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ équation cartésienne de (m_{AB}) : $x - 2y + c_M = 0$

(il faut passer par $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$)

$M \in (m_{AB}) \Rightarrow 2 - 12 + c_M = 0 \Rightarrow c_M = 10 \Rightarrow \boxed{(m_{AB}) : x - 2y + 10 = 0}$

* N milieu de $BC \Rightarrow N\left(-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6-3 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{(m_{BC})} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (m_{BC}) : 3x + y + c_N = 0$

$N \in (m_{BC}) \Rightarrow 3\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} + c_N = 0 \Rightarrow c_N = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow \boxed{(m_{BC}) : 3x + y + 2 = 0}$

* L milieu de $AC \Rightarrow L\left(-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{9}{2}\right)$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6-1 \\ 1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{(m_{AC})} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (m_{AC}) : x + y + c_L = 0$

$L \in (m_{AC}) : 1 + 1 + c_L = 0 \Rightarrow c_L = -2$

$\Rightarrow \boxed{(m_{AC}) : x + y - 2 = 0}$

* Le centre du cercle circonscrit : l'intersection entre les médiatrices

$\Rightarrow - \begin{cases} x + y = 2 & (m_{AC}) \\ 3x + y = -2 & (m_{BC}) \end{cases}$

$x - 3x + y - y = 2 - (-2) \iff -2x = 4$

$x = -2 \Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow$ centre $\boxed{O(-2\,;4)}$

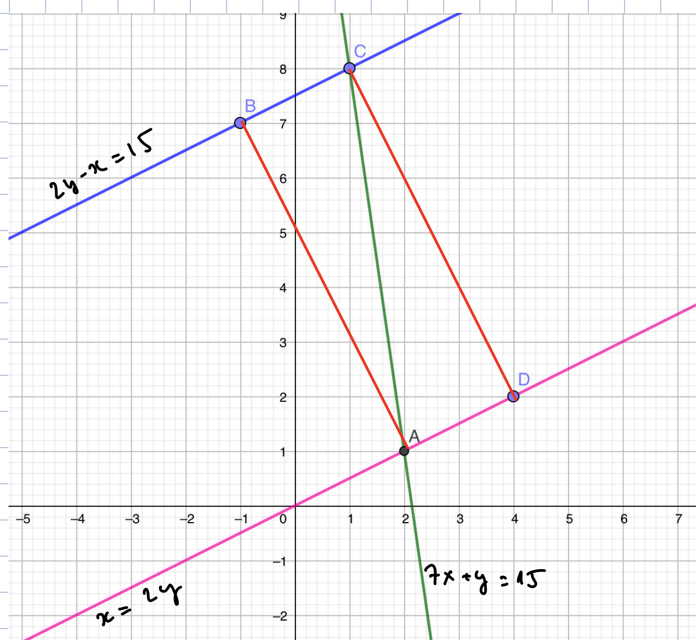
* Le rayon du cercle circonscrit = distance d'un sommet à O

$\Rightarrow \vec{AO} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r = \|\vec{AO}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\Rightarrow \boxed{r = 5\ u}$

3.1.23 On donne les équations de deux côtés et d'une diagonale d'un rectangle : $x = 2y$, $2y - x = 15$ et $7x + y = 15$. Calculer les coordonnées de ses sommets.



* $A = \begin{cases} x = 2y \\ 7x + y = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow 7 \cdot 2y + y = 15$

$14y + y = 15 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow \boxed{A(2;1)}$

* $C = \begin{cases} 7x + y = 15 \\ 2y - x = 15 \end{cases} \Rightarrow x = -15 + 2y$

$\Rightarrow 7(-15 + 2y) + y = 15$

$\Rightarrow -105 + 14y + y = 15$

$15y = 105 + 15 = 120$

$y = 8 \Rightarrow x = -15 + 16 = 1$

$\Rightarrow \boxed{C(1;8)}$

* $(AB) \perp x - 2y = 0 \Rightarrow (AB) : -2x - y + c = 0$

$A \in (AB) \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 + c = 0$

$\Rightarrow c = 5$

$\Rightarrow (AB) : -2x - y + 5 = 0$ ou $2x + y - 5 = 0$

$\Rightarrow B = \begin{cases} 2y - x = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 15 \\ 2(2y - 15) + y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 4y - 30 + y = 5 \Rightarrow 5y = 35 \Rightarrow y = 7$

$\Rightarrow x = 2 \cdot 7 - 15 = -1 \Rightarrow \boxed{B(-1;7)}$

* $\vec{AB} = \vec{DC}$ (parallèles) $\Rightarrow \vec{DC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{DC}$ est vecteur directeur de (DC) $\Rightarrow \vec{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (DC) : 6x + 3y + c = 0$

$C \in (DC) \Rightarrow 6 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -6 - 24 = -30$

$\Rightarrow (DC) : 6x + 3y - 30 = 0$ ou $2x + y - 10 = 0$

$D = \begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

$\Rightarrow 2(2y) + y - 10 = 0 \Rightarrow 4y + y - 10 = 0$

$5y = 10 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow \boxed{D(4;2)}$

* Autre méthode pour déterminer D BEACOUP PLUS SIMLE !

On a : $\vec{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

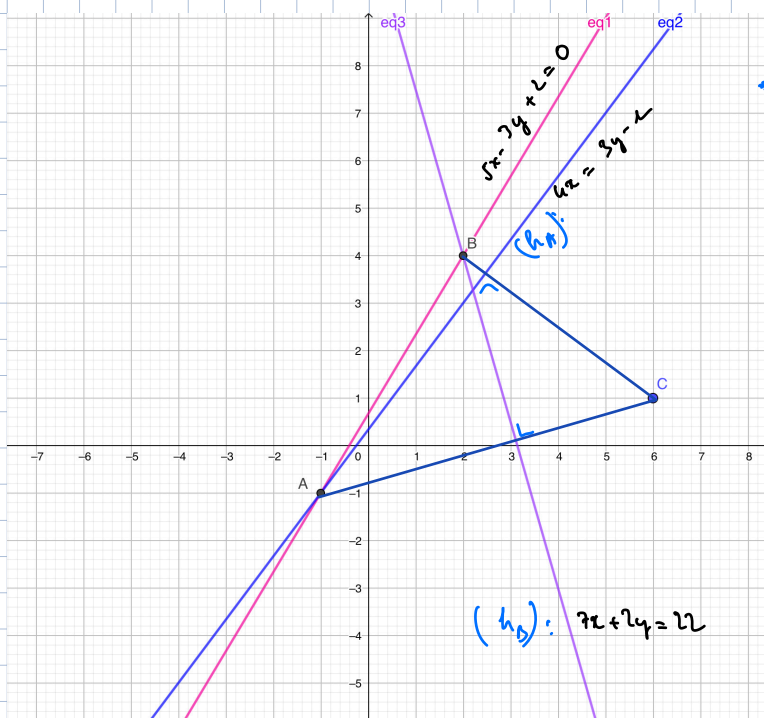
$\Rightarrow \vec{DO} + \vec{OC} = \vec{DC} \iff -\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{DC}$

$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OC} - \vec{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OD} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D(4;2)$

3.1.24 D'un triangle ABC, on donne l'équation du côté AB : $5x - 3y + 2 = 0$, celle de la hauteur issue de A h_A : $4x = 3y - 1$ ainsi que celle de la hauteur issue de B h_B : $7x + 2y = 22$. Calculer les coordonnées du point C.



$* \; A = (AB) \cap (h_A) = \begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 4x = 3y - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow - \begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

$x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow 3y = 4x + 1$

$\Rightarrow y = \dfrac{4x+1}{3} = \dfrac{-4+1}{3} = -1$

$\Rightarrow \boxed{A(-1;-1)}$

$* \; B = (AB) \cap (h_B) = \begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 6y = -4 \\ 21x + 6y = 66 \end{cases}$

$31x = 62$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \boxed{B(2;4)}$

$(BC) \perp (h_A) \Rightarrow (BC) : -3x - 4y + c_1 = 0$

$4x - 3y + 1 = 0$

$B \in (BC) \Rightarrow -3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = 6 + 16 = 22$

$\Rightarrow (BC) : -3x - 4y + 22 = 0$

ou $3x + 4y - 22 = 0$

$(AC) \perp (h_B) \Rightarrow (AC) : 2x - 7y + c_2 = 0$

$7x + 2y - 22 = 0$

$A \in (AC)$

$$\Rightarrow \quad 2(-1) - 7(-1) + c_2 = 0$$

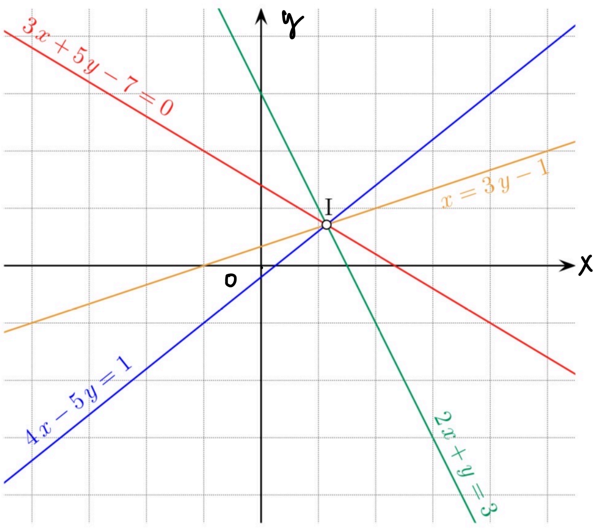
$$-2 + 7 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = -5$$

$$\Rightarrow (AC) : \quad 2x - 7y - 5 = 0$$

$$C = (AC) \cap (BC) = \begin{cases} 2x - 7y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C(6\,;1)}$$

3.1.28 Prouver que les quatre droites : $a : 2x + y = 3$, $b : x = 3y - 1$, $c : 3x + 5y - 7 = 0$ et $d : 4x - 5y = 1$ sont concourantes en un point.



Calculons les coordonnées du point I, intersection des droites a et b.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = 3y - 1 \end{cases}$$

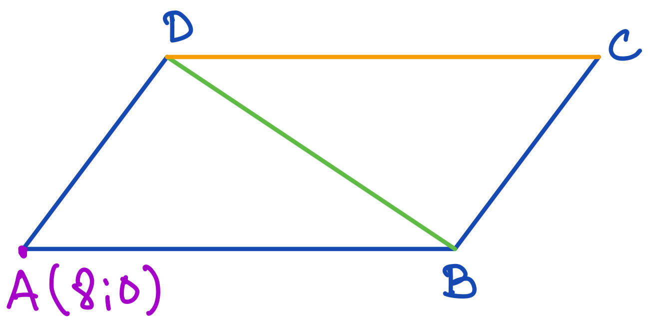
En remplaçant $x = 3y - 1$, que donne la seconde équation, dans la première, on obtient : $2(3y - 1) + y = 3$, de sorte que $y = \frac{5}{7}$.
Par conséquent, $x = 3 \cdot \frac{5}{7} - 1 = \frac{8}{7}$.
Ainsi le point I a pour coordonnées $\mathrm{I}(\frac{8}{7}\,;\frac{5}{7})$.

Vérifions que le point I appartient à la droite c : $3 \cdot \frac{8}{7} + 5 \cdot \frac{5}{7} - 7 = 0$.

De même, le point I se situe sur la droite d : $4 \cdot \frac{8}{7} - 5 \cdot \frac{5}{7} = 1$.

En conclusion, le point I appartient simultanément aux droites a, b, c et d : elles sont donc bel et bien concourantes.

3.1.15 D'un parallélogramme $ABCD$, on donne le sommet $A(8;0)$, l'équation du côté $CD:\ x-2y+5=0$, ainsi que l'équation de la diagonale $BD : 6x-25y=-43$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et BC.



$(CD):\ x-2y+5=0$

$(BD):\ 6x-25y+43=0$

① Equation AB :

$AB \,//\, CD$

$(AB):\ x-2y+c=0$

par $A(8;0)$: $\quad 8-0+c=0 \Rightarrow c=-8$

$(AB):\ x-2y-8=0$

② Déterminons le point D :

$$\begin{cases} 6x-25y+43=0 & \cdot 1 \\ x-2y+5=0 & \cdot(-6) \end{cases} \Big| \times$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y+13=0 \\ x=2y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow D(-3;1)$$

③ Equation AD: $\quad$ avec $A(8;0)$ et $D(-3;1)$

$$\frac{y-0}{x-8}=\frac{1-0}{-3-8}=\frac{1}{-11} \Leftrightarrow -11y=x-8$$

$$\Leftrightarrow (AD):\ x+11y-8=0$$

④ Déterminons le point B :

$$\begin{cases} x-2y-8=0 & \cdot 6 \\ 6x-25y+43=0 & \cdot(-1) \end{cases} \Big| \times$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13y - 91 = 0 \\ x = 2y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 22 \end{cases} \qquad B(22;7)$$

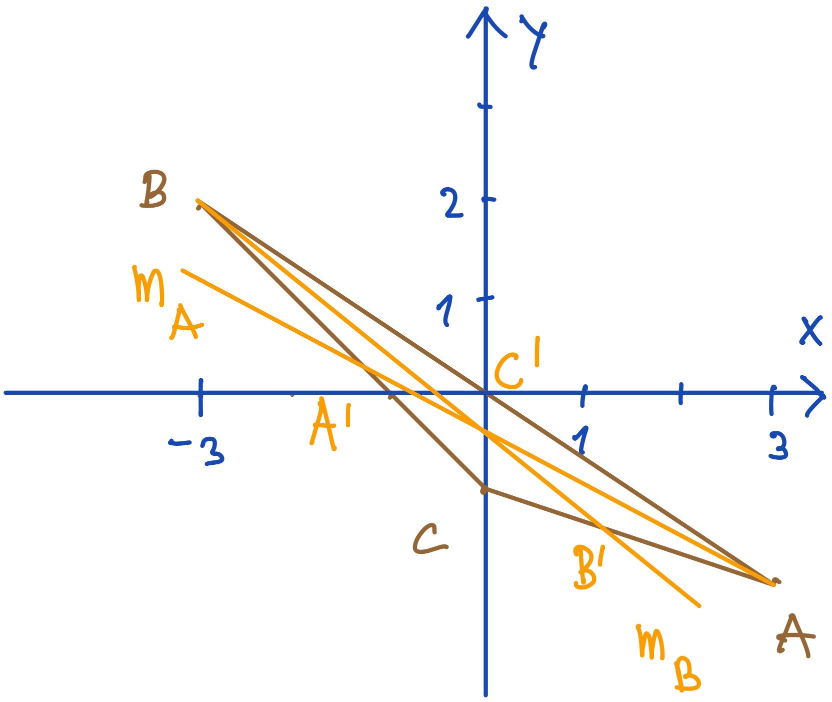
⑤ Equation BC : $\quad BC // AD \Rightarrow$

(BC): $x + 11y + c = 0$ par $B(22;7)$

$22 + 77 + c = 0 \Rightarrow c = -99$

(BC): $x + 11y - 99 = 0$

3.1.8 Déterminer les équations cartésiennes des médianes du triangle dont les sommets sont $A(3;-2)$, $B(-3;2)$, $C(0;-1)$, ainsi que les coordonnées de son centre de gravité.



Calcul des milieux des côtés :

A' : milieu de BC : $A'\left(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

B' : milieu de AC : $B'\left(\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$

C' : milieu de AB : $C'(0;0)$ c'est l'origine

① médiane issue de A : c'est la droite AA'

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$(AA') : 5x + 9y + c = 0$

par A : $15-18+C=0 \Rightarrow C=3$

(AA') : $5x+9y+3=0$

② médiane issue de B : c'est la droite BB'

$$\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -7/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(BB') : $7x+9y+c=0$

par B : $-21+18+c=0 \Rightarrow c=3$

(BB') : $7x+9y+3=0$

③ médiane issue de C : c'est la droite CC'

$$\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ la droite est verticale : $x=0$

(CC') : $x=0$

④ Calcul du centre de gravité G :

c'est l'intersection de deux médianes.

$$\begin{array}{l} (CC') \\ (AA') \end{array} \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 9y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 9y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -1/3$$

$$G\left(0 ; -1/3\right)$$

3.1.9 Dessiner les droites données par leurs équations cartésiennes :

a) $2x - 3y + 6 = 0$

b) $5x + 3y - 15 = 0$

c) $7x + 3y = 0$

d) $2x + 5 = 0$

e) $-3y + 9 = 0$

f) $2x = 0$

g) $-5y = 0$

h) $4(x + 2) = 5(y - 3)$

Pour dessiner ces droites, soit on trouve deux solutions de l'équation, soit on passe par la forme $y = mx + h$.

a) $A_1(-3;0)$ et $A_2(0;2)$

b) $B_1(3;0)$ et $B_2(0;5)$

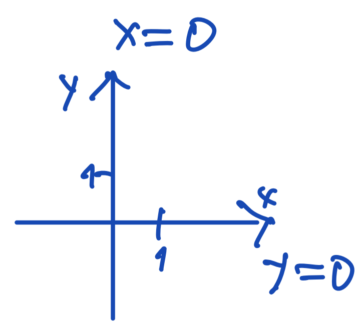
c) $C_1(0;0)$ et $C_2(3;-7)$

d) $x = -\frac{5}{2}$ droite verticale

e) $y = 3$ droite horizontale

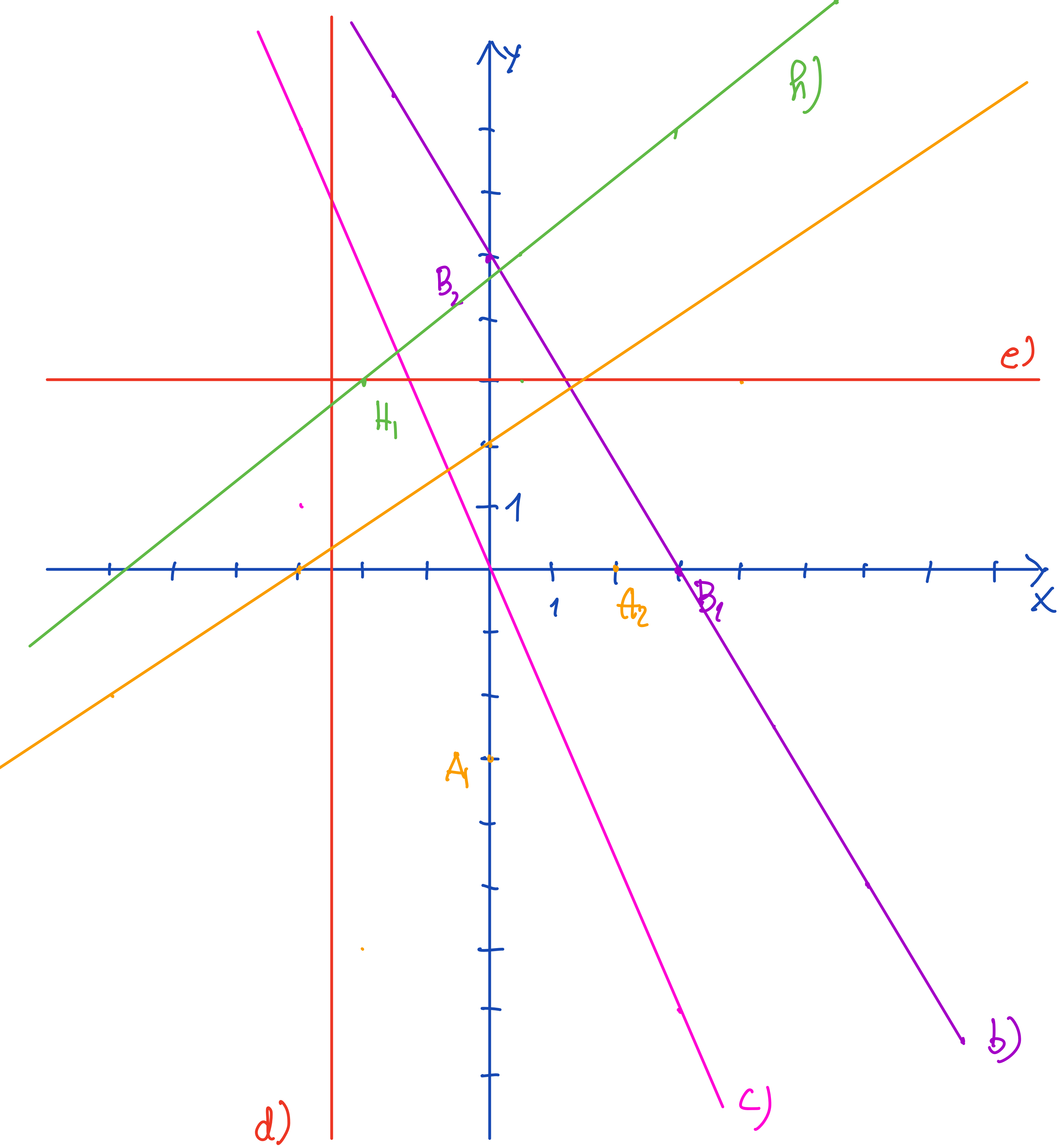
f) $x = 0$ c'est l'axe des ordonnées

g) $y = 0$ c'est l'axe des abscisses



h) $4x + 8 = 5y - 15 \iff 4x - 5y + 23 = 0$

$y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$ avec le point $H_1(-2;3)$



y
x
1
1
h)
e)
b)
c)
d)
B2
H1
A2
B1
A