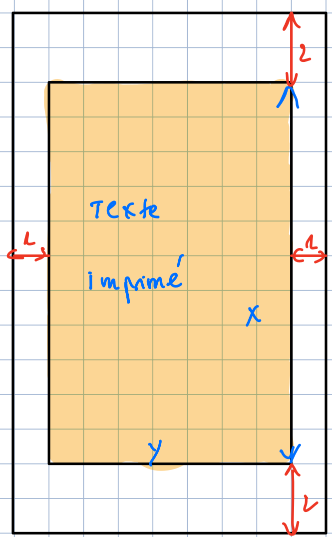
OPTIMISATION

2.9.13 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.



x = dimension (en cm) de la longueur du rectangle du text imprimé

y = largeur (en cm) du rectangle du text imprimé

Aire du rectangle du texte imprimé :

$$A = 392 = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{392}{x}$$

Aire de la feuille :

$$f(x) = (x+4)\cdot\left(\frac{392}{x}+2\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 392 + 2x + \frac{1568}{x} + 8 = 2x + \frac{1568}{x} + 400$$

$$ED_f = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1568}{x^2} = \frac{2(x^2-784)}{x^2} = \frac{2(x-28)(x+28)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -28 \text{ ou } x = 28$$

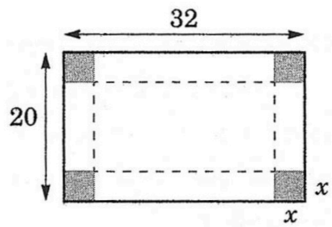
($x = -28$: à éliminer)

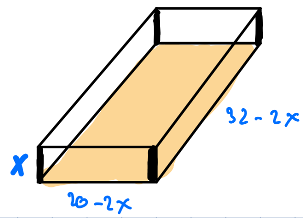
x		0		28	
$f'(x)$	//////	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	//////	‖	↘	512	↗

Min $(28 ; 512)$

$\Rightarrow$ c'est une feuille de 32 cm sur 16 cm

2.9.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?





Contrainte : $0 < x < 10$

$ED_f =]0;10[$

1) $V(x) = (32-2x)(20-2x)\cdot x$

2) Déterminer le max de la fonction $V(x)$:

$\Rightarrow V(x) = 4x(16-x)(10-x) = 4x(160 - 26x + x^2)$

$= 4(x^3 - 26x^2 + 160x)$

d'où $V'(x) = 4(3x^2 - 52x + 160)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 52x + 160 = 0$

$\Delta = 784 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 28$

$\Rightarrow x = \dfrac{52 \pm 28}{6}$: $x_1 = \dfrac{40}{3} > 0$ à éliminer ; $x_2 = 4$

3) Tableau de la croissance :

x	0		4		10
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	Max	↘	

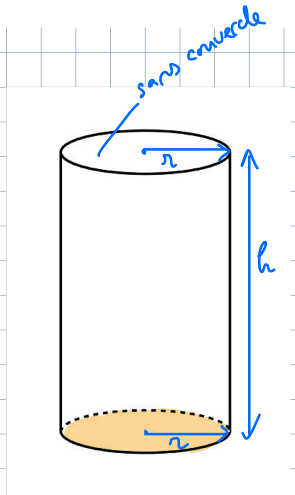
4) Conclusion :

Le max est atteint lorsque $x = 4$

$\Rightarrow$ le volume est égal à :

$4 \cdot 24 \cdot 12 = 1152$ [cm^3]

2.9.15 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume 324π cm^3. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?



$V = 324\pi\,[cm^3]$

Le fond : prix $15\,[c/cm^2]$

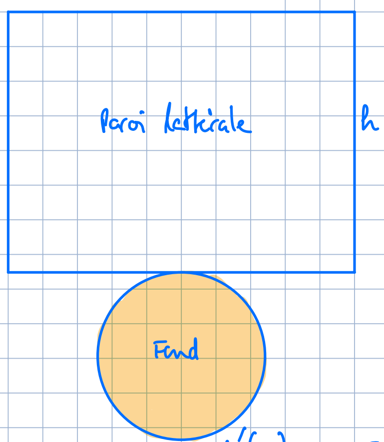
paroi latérale : $5\,[c/cm^2]$

$V = \pi r^2 h = 324\pi$

$\Rightarrow h = \dfrac{324}{r^2}$ contrainte : $r > 0,\ h > 0$

Aire fond $= \pi r^2$

Aire latérale $= 2\pi r h = 2\pi r \cdot \dfrac{324}{r^2}$



fonction qui modélise le prix : $f(r)$

$f(r) = 15\cdot\pi r^2 + 5\cdot 2\pi r\cdot\dfrac{324}{r^2}$

$f(r) = 15\pi r^2 + 10\pi\,\cancel{r}\cdot\dfrac{324}{\cancel{r^2}} = 15\pi\left(\dfrac{r^3+216}{r}\right)$

avec $r > 0$

$\Rightarrow f'(r) = 15\pi\,\dfrac{3r^2\cdot r - (r^3+216)}{r^2} = 15\pi\,\dfrac{2r^3-216}{r^2} = 30\pi\,\dfrac{r^3-108}{r^2}$

$ED(f') = \mathbb{R}^*$, condition $r > 0$

$\Rightarrow f'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 - 108 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4} \cong 4{,}78\,[cm]$

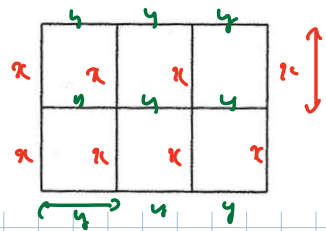
Tableau de la croissance :

r		0		$3\sqrt[3]{4}$	
$f'(r)$	//	‖	$-$	0	$+$
$f(r)$	//	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

Conclusion : Le min est atteint par

$r = 3\sqrt[3]{4} \Rightarrow h \cong 14{,}28\,[cm]$

2.8.16 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



on pose : x = longueur (en m) d'un enclos rectangulaire

y = largeur (en m) ״

longueur totale : $8x + 9y = 288$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{288 - 8x}{9}$

Aire surface au sol : $f(x) = \underbrace{6 \cdot x \cdot \left(\overbrace{\dfrac{288-8x}{9}}^{\geq 0}\right)}_{\text{Aire d'un enclos}}$

$ED_f = [0\,;36]$

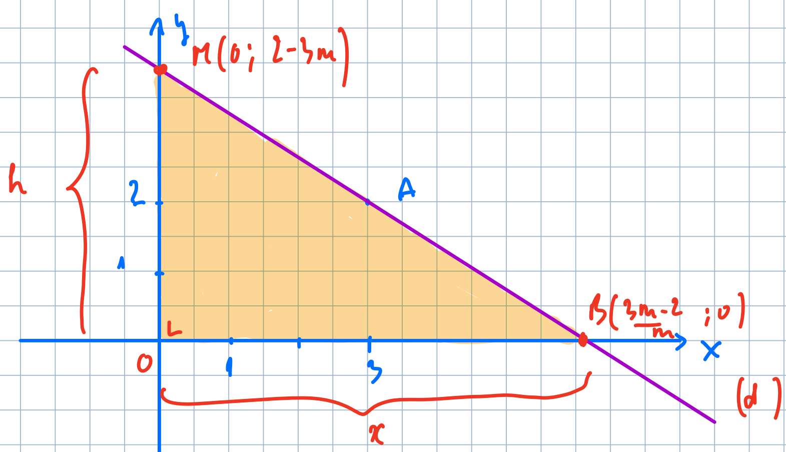
$\Rightarrow f(x) = \frac{16}{3}x^2 + 192x \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{32}{3}x + 192 = -\frac{32}{3}(x-18)$

$\Rightarrow$ Tableau de variation :

x	$-\infty$	0		18		36	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	−		
$f(x)$		0	↗	1728	↘	0	

$\Rightarrow$ Max $(18\,;1728)$ et chaque enclos mesure 18m sur $\underbrace{16}_{\frac{288-8\cdot 18}{9}}$m

2.8.17 Calculer l'équation de la droite de pente négative qui passe par le point $A(3;2)$ et qui délimite avec les axes de coordonnées un triangle d'aire minimale.



équation de la droite de pente négative : $y = mx + h$

$A \in d \Rightarrow 2 = 3m + h \rightarrow h = 2 - 3m$

$\Rightarrow (d) : y = mx + 2 - 3m$

(d) coupe Ox : $mx + 2 - 3m = 0 \Rightarrow x = \frac{3m-2}{m}$ ← zéro de (d)

$(m < 0)$

Aire du Triangle : $f(m) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \frac{3m-2}{m} \cdot (2-3m)$

$\left(= \frac{1}{2} OA \cdot OM\right)$

$\Rightarrow f(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{-9m^2 + 12m - 4}{m}\right)$

$ED_f = \mathbb{R}^*_-$

$$\Rightarrow f'(m) = \frac{(-18m+12)\cdot m - (-9m^2+12m-4)}{2m^2} = \frac{-9m^2+4}{2m^2}$$

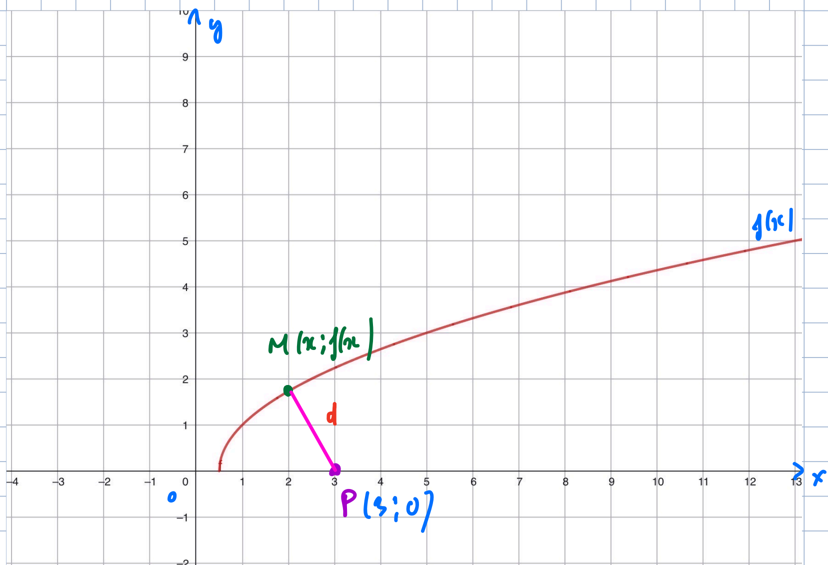
$$= \frac{(2-3m)(2+3m)}{2m^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \text{ à éliminer} \end{cases}$$

* <u>Tableau de variation</u> :

m	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(m)$		$-$	0	$+$	‖	
$f(m)$		$\searrow$	12	$\nearrow$	‖	

$\text{Min}\left(-\frac{2}{3} ; 12\right) \Rightarrow$ la droite a comme équation : $y = -\frac{2}{3}x + 4$

2.8.18 Quel est le point de la courbe $y = \sqrt{2x-1}$ qui est le plus proche du point $P(3;0)$?



posons $M(x; f(x))$ le point le plus proche

Fonction à optimiser : la distance au carré (distance MP^2)

$M \in f(x) \Rightarrow M(x; \sqrt{2x-1})$

$\Rightarrow d = \|\vec{MP}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0-\sqrt{2x-1} \\ 3-x \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -\sqrt{2x-1} \\ 3-x \end{pmatrix}\right\|$

il faut minimiser la distance MP

$\Rightarrow d = \sqrt{\left(-\sqrt{2x-1}\right)^2 + (3-x)^2} \Rightarrow d^2 = 2x-1+(3-x)^2$

$\Rightarrow f(x) = d^2 = 2x-1+9-6x+x^2$

$\Rightarrow f(x) = x^2-4x+8$

condition : $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightsquigarrow ED_f = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$- \quad \frac{1}{2} \quad +$

$\Rightarrow f'(x) = 2x-4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

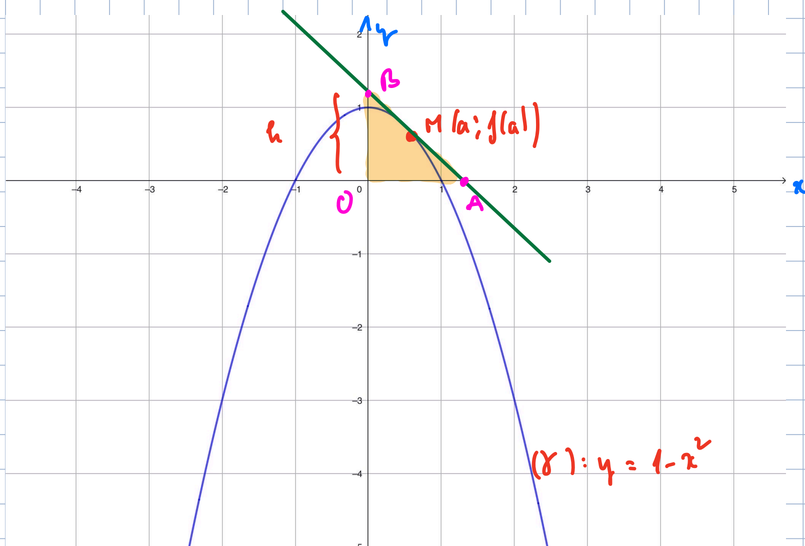
* <u>Tableau de variation :</u>

x		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$		$13/4$	$\searrow$	4 min	$\nearrow$

$\Rightarrow$ Min $(2 ; 4)$ $\Rightarrow$ le point $M(2 ; \sqrt{3})$ est le plus proche du point P

2.8.19 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ au point M coupe l'axe Ox en un point A et

l'axe Oy en B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.



$M(a\,;\ 1-a^2)$

$f(x) = 1 - x^2$

$\Rightarrow f'(x) = -2x$

$\Rightarrow$ Tangente (t) au point d'abscisse $x = a$:

$(t): y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow (t): \ y - (1-a^2) = -2a(x-a) \Rightarrow (t): \ y = -2ax + \underbrace{a^2+1}_{h}$

(t) coupe Ox en : $-2ax + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-a^2-1}{-2a} = \dfrac{-(a^2+1)}{-2a} = \dfrac{a^2+1}{2a}$

$\Rightarrow A\left(\dfrac{a^2+1}{2a}\,;\ 0\right) \Rightarrow B = (0\,;\ a^2+1)$

$\Rightarrow$ Aire $\Delta\, OAB = \dfrac{1}{2}\, OA \cdot OB = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{a^2+1}{2a} \cdot \underbrace{a^2+1}_{h} = \dfrac{(a^2+1)^2}{4a}$

$\Rightarrow \quad g(a) = \frac{(a^2+1)^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad ED_g = \,]0;1]$

$$g'(a) = \frac{2(a^2+1)\cdot(2a)\cdot 4a - (a^2+1)^2\cdot 4}{16a^2}$$

$$= \frac{4(a^2+1)(4a^2-a^2-1)}{16a^2} = \frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2}$$

$\Rightarrow \quad g'(a) = 0 \Rightarrow \frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2} = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \text{à éliminer} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \end{cases}$

* Tableau de croissance :

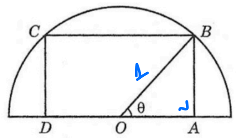
a		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1	
$g'(a)$		‖	$-$	0	$+$		
$g(a)$		‖	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	1	

$\text{Min}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \Rightarrow \text{Min}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

le point $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ minimise Δ OAB

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ d'où $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{3}{9} = \frac{9-3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2.~~9~~.20 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.



$\sin(\theta) = \dfrac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \sin(\theta)$

$\cos(\theta) = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow OA = \cos(\theta)$

Aire du rectangle : $A(\theta) = AD \cdot AB = 2OA \cdot AB = 2\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)$

$\Rightarrow A(\theta) = \sin(2\theta)$; avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A'(\theta) = \cos(2\theta)\cdot 2 \Rightarrow A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 0$

avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$A(\theta)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Conclusion :

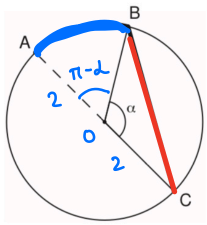
Les dimensions du rectangle :

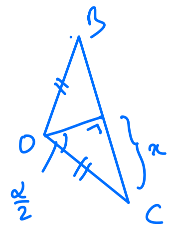
$AB = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AD = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 = \sqrt{2}$

L'aire vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = 1\ u^2$

2.~~9~~.21 Une canalisation doit relier deux points A et C en bordure d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Ces deux points sont situés sur un même diamètre de ce cercle. La canalisation passe sur terre entre les points A et B, sous l'eau entre les points B et C. Sachant que le coût de cette installation est de 3'000.- le mètre sur terre et 5'000.- le mètre sous l'eau, déterminer la valeur en degrés de l'angle $\alpha \in [0°; 180°]$ pour laquelle le coût de cette installation est minimal.





$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow x = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

sur terre : 3 M CHF / km

sous l'eau : 5 M CHF / km

$\Rightarrow$ longueur $\overset{\frown}{AB} = (\pi-\alpha)\cdot 2$

longueur $\overline{BC} = 2\cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Rightarrow$ coût total : $f(\alpha) = 3\cdot 2\cdot(\pi-\alpha) + 5\cdot 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$f(\alpha) = 6(\pi-\alpha) + 20\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$

$\Rightarrow f'(\alpha) = -6 + 20\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -6 + 10\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 10\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \cong \pm 0,93 + k2\pi \Rightarrow \alpha \cong \pm 1,85 + k4\pi$

Tableau de la croissance :

α		0		1,85		π	
$f'(\alpha)$			+	0	−		
$f(\alpha)$		Min	↗	Max	↘	Min	

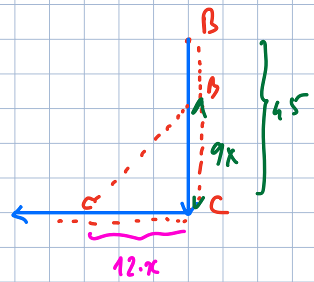
Les minima se situent aux bornes de l'ensemble :

$f(0) = 18,85$ MCHF

$f(\pi) = 20$ MCHF

Le min est atteint lorsque $\alpha = 0$

2.8.22 A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 noeuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 noeuds. A quelle heure les bateaux seront ils à une distance minimale ? (Rappel : un noeud = un mille par heure).



Fonction à optimiser : la distance au carré

On pose x = nombre d'heures écoulées depuis midi

$$\Rightarrow f(x) = (45-9x)^2 + (12x)^2 \qquad \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow f(x) = 225x^2 - 810x + 2025$$

$$f'(x) = 450x - 810 \quad \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{810}{450} = \frac{9}{5}$$

* Tableau de croissance :

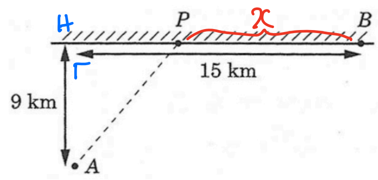
x		0		$\frac{9}{5}$	
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$
$f(x)$	//////	2025	$\searrow$	1296	$\nearrow$

$\Rightarrow$ Min $\left(\frac{9}{5} ; 1296\right)$, il sera 13h 48 min

$\Big($ $x = \frac{9}{5}$ h $= 1{,}8$ h $= 1$h $+ 0{,}8 \cdot 60 = 1$h $+ 48$ min

$\Rightarrow$ midi + 1h + 48 min = 13h 48 min $\Big)$

2.9.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



$\Rightarrow$ Minimiser le temps de parcours

temps total : $\dfrac{AP}{4} + \dfrac{PB}{5}$

On pose $PB = x$ où $0 \leq x \leq 15$

Pythagore : $AP^2 = AH^2 + HP^2 = 9^2 + (15-x)^2$

$\Rightarrow AP = \sqrt{9^2 + (15-x)^2} = \sqrt{81 + (15-x)^2} = \sqrt{x^2 - 30x + 306}$

$\Rightarrow$ Fonction du temps :

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{4} + \frac{x}{5} \qquad \text{avec } 0 \leq x \leq 15$$

et $ED_f = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{5\sqrt{x^2-30x+306} + 4x}{20} = \frac{1}{20}\left[5\sqrt{x^2-30x+306} + 4x\right]$$

Cherchons la dérivée de $t(x)$:

$$t'(x) = \frac{1}{20}\left[5 \frac{2x-30}{\sqrt{x^2-30x+306}} + 4\right] = \frac{1}{20}\left[\frac{5(x-15)}{\sqrt{x^2-30x+306}} + 4\right]$$

$$t'(x) = \frac{1}{20} \frac{5(x-15) + 4\sqrt{x^2-30x+306}}{\sqrt{x^2-30x+306}}$$

$$t'(x) = 0 \iff 5(x-15) + 4\sqrt{x^2-30x+306} = 0$$

$$\iff 4\sqrt{\underbrace{x^2-30x+306}_{\geq 0}} = \underbrace{-5x+75}_{\geq 0} \quad \Big|\ (\ )^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 15$$

$$\iff 16\left(x^2 - 30x + 306\right) = 25x^2 - 750x + 5625$$

$$\iff x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$\iff (x-27)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = 27}_{\text{à éliminer}} \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Tableau de la croissance :

x	0		3		15
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$t'(0) = \frac{1}{20}\left(5 \cdot \frac{-30}{2\sqrt{306}} + 4\right) < 0$$

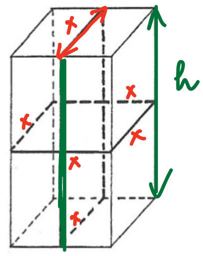
Conclusion :

le minimum est atteint lorsque $x = 3$

$$t(3) = \frac{15}{4} + \frac{3}{5} = \frac{87}{20}\ [h]$$

$$= 4h\ \frac{7}{20}\ \text{min} = 4h\ 21\ \text{min}$$

2.8.24 On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm^3 dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée. Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.



On pose x = côté en dm du carré

Volume du parallélipipède : $V = x^2 \cdot h = 12 \Rightarrow h = \frac{12}{x^2}$

$\Rightarrow$ Longueur totale :

$$f(x) = 6x + 2 \cdot \frac{12}{x^2} = 6x + \frac{24}{x^2}$$

$$ED_f = \mathbb{R}_+^*$$

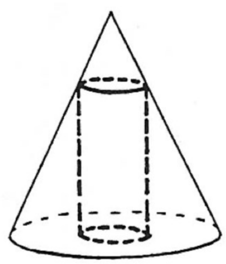
$$\Rightarrow f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3} = \frac{6x^3 - 48}{x^3} = \frac{6(x^3-8)}{x^3}$$

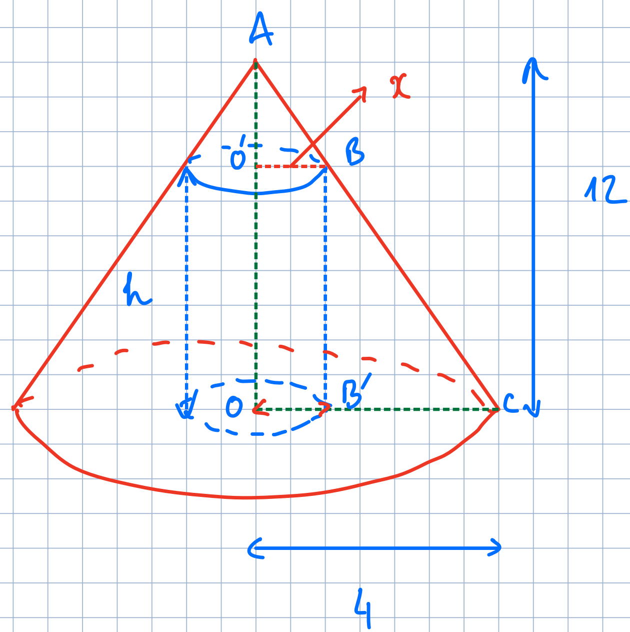
$\Rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $\frac{6(x^3-8)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

x		0		2	
$f'(x)$		‖	$-$	0	$+$
$f(x)$		‖	↘	18	↗

$\Rightarrow$ min $(2 ; 18)$ $\Rightarrow$ le côté de la base = 2 dm et la hauteur = 3 dm

2.8.25 Calculer les dimensions du cylindre de plus grand volume qu'il est possible de cacher sous un cône circulaire droit de rayon 4 cm et de hauteur 12 cm.





On pose x = rayon du cylindre (en cm)

Volume du cylindre :

$f(x;h) = \pi \cdot x^2 \cdot h$

$\Rightarrow$ reste à exprimer h en fct de x

Théorème de Thalès : $\frac{BB'}{OA} = \frac{B'C}{OC} \Leftrightarrow \frac{h}{12} = \frac{4-x}{4}$

$\Rightarrow h = \frac{12(4-x)}{4} \Rightarrow h = 3(4-x) = 12-3x$

D'où $f(x;h) = f(x) = \pi x^2 \cdot 3(\underbrace{4-x}_{0 \leq x \leq 4}) = \pi x^2 (12-3x)$

$\Rightarrow \quad f(x) = 12\pi x^2 - 3\pi x^3 = -3\pi x^3 + 12\pi x^2$

$\Rightarrow \quad ED_f = [0 ; 4]$

$f'(x) = -9\pi x^2 + 24\pi x$

$\Rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $\quad -9\pi x^2 + 24\pi x = 0$

$$3\pi x(-3x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

<u>Tableau de croissance</u> :

x		0		$\frac{8}{3}$		4	
$f'(x)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(x)$	//////	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0	//////

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256\pi}{9} \quad \rightarrow \quad \text{Max}\left(\frac{8}{3} ; \frac{256\pi}{9}\right)$

$\Rightarrow$ Le rayon du cylindre est $\frac{8}{3}$ cm, la hauteur est 4cm

$h = 12 - 3x = 12 - 3 \cdot \frac{8}{3} = 4$