2M

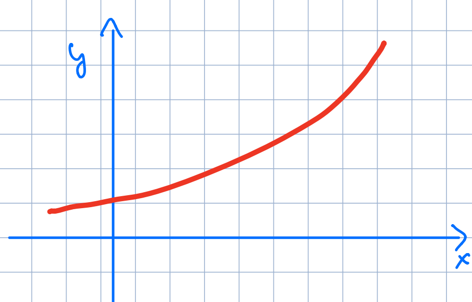
Croissance et études de fonctions

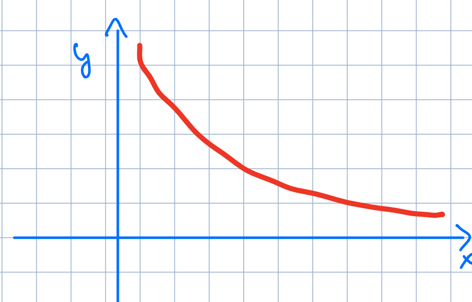
1) Croissance et extremum :

La dérivée d'une fonction f en un point A a été définie comme la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point A. Mais au-delà du calcul d'une tangente à une courbe, la dérivée nous fournit directement des informations sur la "forme" de la courbe de f.

* Définitions :

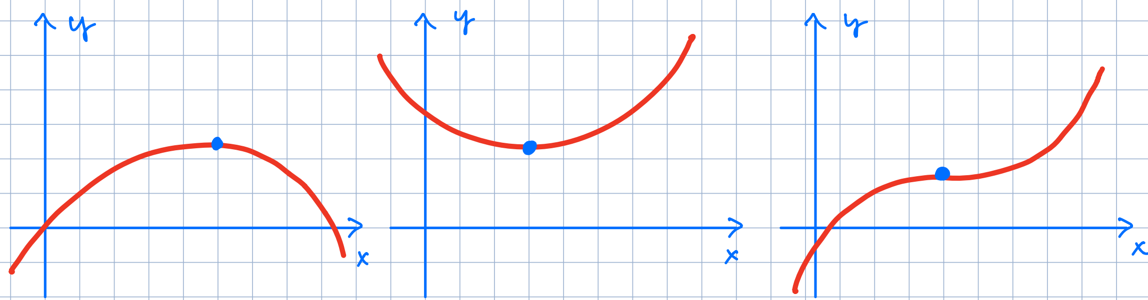
- Une fonction f est dite croissante si lorsque x augmente, $f(x)$ aussi
- Une fonction f est dite décroissante si lorsque x augmente, $f(x)$ diminue





- Une fonction f admet un maximum en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) > f(b)$
- Une fonction f admet un minimum en a si pour toutes valeurs b dans un voisinage de a, $f(a) < f(b)$

- Une fonction f admet un replat en a si $f'(a) = 0$ mais qu'il ne s'agit ni d'un minimum ou ni maximum.



* Remarques :

- Les notions introduites ci-dessus sont locales : une fonction peut admettre un maximum et prendre en d'autres points des valeurs supérieures

- De manière générale, un extremum est un maximum ou un minimum

2) Étude de la croissance d'une fonction :

Le signe de la dérivée permet de savoir pour quelles valeurs de x la fonction est croissante, décroissante ou admet une tangente de pente nulle.

$\Rightarrow$ Il suffit d'effectuer le tableau de signes de f' pour obtenir la croissance de f.

3) Plan d'étude d'une fonction :

a) Recherche de l'ensemble de définition ED_f + Parité

b) Recherche des zéros de la fonction puis étude du signe de la fonction f.

c) Calcul des limites aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche des asymptotes éventuelles (AV, AH, AO) avec la position de la courbe relativement à ses asymptotes.

d) Calcul de la dérivée.

e) Tableau de croissance (tableau des variations).

f) Calcul de points particuliers (min, max, ordonnée à l'origine).

g) Courbures de f + points d'inflexion (dérivée seconde)

h) Tracé de la courbe représentative de f.

4) Définition de la dérivée seconde d'une fonction

Soit f dérivable sur I, dont la fonction dérivée f' sur cet intervalle est dérivable, on appelle fonction dérivée seconde de f sur I la dérivée de f'

Notation : $\boxed{(f'(x))' = f''(x)}$

* **Propriétés des fonctions convexe et concave**

- Si $f''(x) \geq 0$ sur I, alors f est convexe sur I
- Si $f''(x) \leq 0$ sur I, alors f est concave sur I

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$, $f''(x)$
- Établir le tableau de variations.

=> Solution :

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$ → zéros : -1 et 3

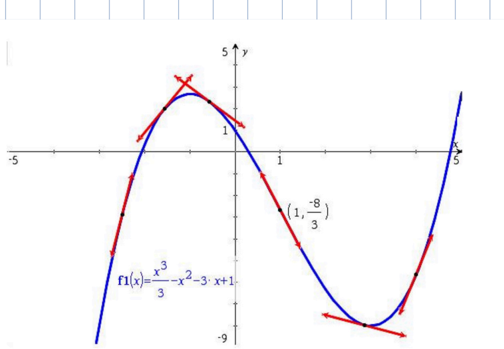
$f''(x) = 2x - 2$ → zéro : 1

tableau de variations, de signe de la dérivée seconde et de convexité de la fonction :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$8/3$	↘	$-8/3$	↘	-8	↗	$+\infty$
Convexité		concave				convexe			

On remarque que la convexité change pour $x = 1$. Au point $(1 ; -\frac{8}{3})$ la courbe traverse sa tangente (elle passe dessous alors qu'elle était située au-dessus de la tangente).

=> Sa représentation graphique :



5) <u>Définition et propriété du point d'inflexion :</u>

- Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction coupe sa tangente (et donc change de convexité)
- Soit f une fonction définie sur I, deux fois dérivable sur I et soit a un réel de I.

Si f'' s'annule pour a et change de signe, alors la représentation graphique de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(a ; f(a))$