Asymptotes

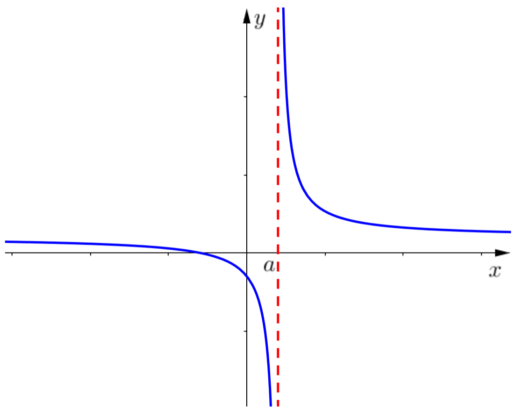
Une droite asymptote à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0. Cette droite particulière nous servira de guide pour tracer le graphique de la fonction donnée.

A l'exception des asymptotes verticales, une courbe peut être amenée à couper sa droite asymptote.

1) Asymptotes verticales

La droite $x = a$ est une asymptote verticale de la fonction $f(x)$ si :

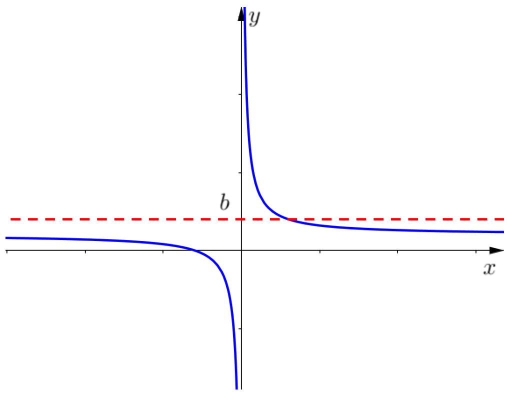
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty$$



2) Asymptotes horizontales

La droite $y = b$ est une asymptote horizontale à droite (respectivement à gauche) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ (respectivement } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b)$$

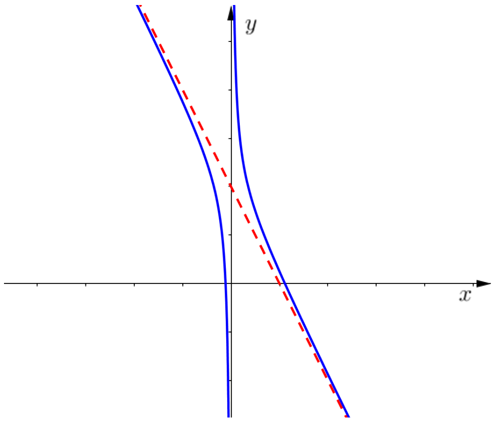


Une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si $deg(N(x)) \leq deg(D(x))$.

3) Asymptotes obliques

La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique à droite (respectivement à gauche) de la courbe $y = f(x)$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0 \text{ (respectivement } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0)$$



4) Recherche de l'asymptote oblique

La courbe $y = f(x)$ admet une asymptote oblique si et seulement si :

$$deg(N(x)) = deg(D(x)) + 1$$

On effectue alors la division polynomiale du numérateur $N(x)$ par le dénominateur $D(x)$:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = mx + h + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\delta(x)}$$

La droite $y = mx + h$ est l'asymptote oblique de la courbe $y = f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$.

Théorème général de l'asymptote oblique

On peut déterminer m et h en calculant les limites suivantes :

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

Dans ce cas, $y = mx + h$ est une équation de l'asymptote oblique à droite de $f(x)$.
La situation est analogue pour $x \to -\infty$.

5) Position d'une courbe par rapport à son asymptote oblique ou son asymptote horizontale

On détermine la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à une asymptote oblique ou horizontale en étudiant le signe de l'expression :

$$\delta(x) = f(x) - (mx + h)$$

Si :
$\delta(x) > 0$: la courbe est au-dessus de l'asymptote
$\delta(x) = 0$: la courbe coupe l'asymptote
$\delta(x) < 0$: la courbe est au-dessous de l'asymptote

6) Exemple : division euclidienne de polynômes

Soit $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^2 - x + 1}$

Diviser $N(x) = x^6 + 1$ par $D(x) = x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{rl|l}
x^6 & +1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
-(x^6 - x^5 + x^4) & & x^4 + x^3 - x - 1 \\ \cline{1-1}
x^5 - x^4 & +1 & \\
-(x^5 - x^4 + x^3) & & \\ \cline{1-1}
-x^3 & +1 & \\
-(-x^3 + x^2 - x) & & \\ \cline{1-1}
-x^2 + x + 1 & & \\
-(-x^2 + x - 1) & & \\ \cline{1-1}
2 & &
\end{array}$$

Donc l'égalité fondamentale de la division : $x^6 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 - x - 1) + 2$
implique $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \dfrac{2}{x^2 - x + 1}$

7) Exemple : recherche de l'asymptote oblique

Soit $f(x) = \dfrac{6x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1}$

$$\begin{array}{r|l}
- \quad 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
6x^3 - 6x^2 + 6x \phantom{{}+3} & \qquad 6x + 4 \\ \hline
- \quad 4x^2 - 5x + 3 & \\
4x^2 - 4x + 4 & \\ \cline{1-1}
-x - 1 &
\end{array}$$

Donc $f(x) = \dfrac{6x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1} = 6x + 4 + \underbrace{\dfrac{-x-1}{x^2 - x + 1}}_{\delta(x)}$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x-1}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, la fonction $y = f(x)$ admet une asymptote oblique de l'équation $y = 6x + 4$.