2.9.10 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \mid x - 2 \mid$

d) $f(x) = \frac{2x^2}{9 - x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

f) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(2-x)^2}$

g) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

j) $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$

k) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

l) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* Parité :

$f(-x) = 3(-x)^4 + 4(-x)^3 = 3x^4 - 4x^3 \neq f(x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow$ f n'est ni paire, ni impaire

* Tableau de signes :

Zéros de $f(x)$: $f(x) = 0 \iff 3x^4 + 4x^3 = 0$

$\iff x^3(3x+4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$-4/3$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* Asymptotes :

pas d'asymptotes

* <u>Croissance</u> :

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

$\rightarrow$ zéros : $12x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \text{Min}(-1 ; -1)$

* <u>Courbure</u> :

$$f''(x) = (12x^3 + 12x^2)' = 36x^2 + 24x = 12x(3x+2)$$

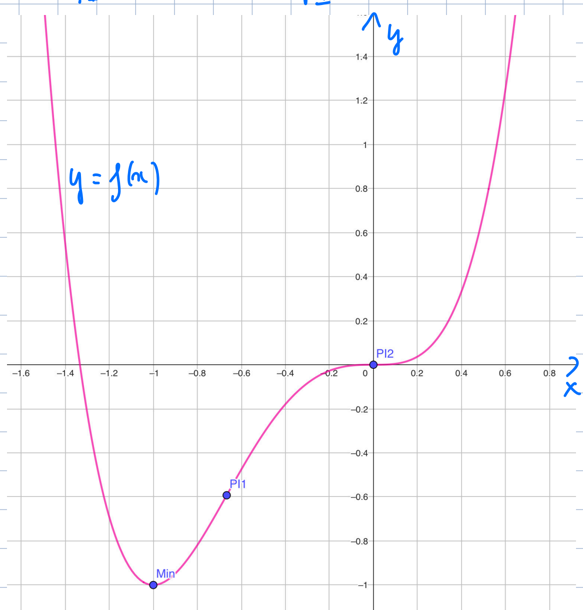
$\Rightarrow$ zéros : $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x(3x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			PI 1		PI 2		

Points d'inflexion :

PI 1 $\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{16}{27}\right)$

PI 2 $(0 ; 0)$



b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* <u>parité</u> :

$f(-x) = 4(-x)^3 - 3(-x)+1 = -4x^3 + 3x + 1 \neq f(x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ ni paire ni impaire

* <u>Tableau de signes</u> :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 = 0$

Horner :

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -1 \ , \ x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

* <u>Asymptotes</u> :

pas d'asymptotes

* <u>Croissance</u> :

$f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x-1)(2x+1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ , x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+$

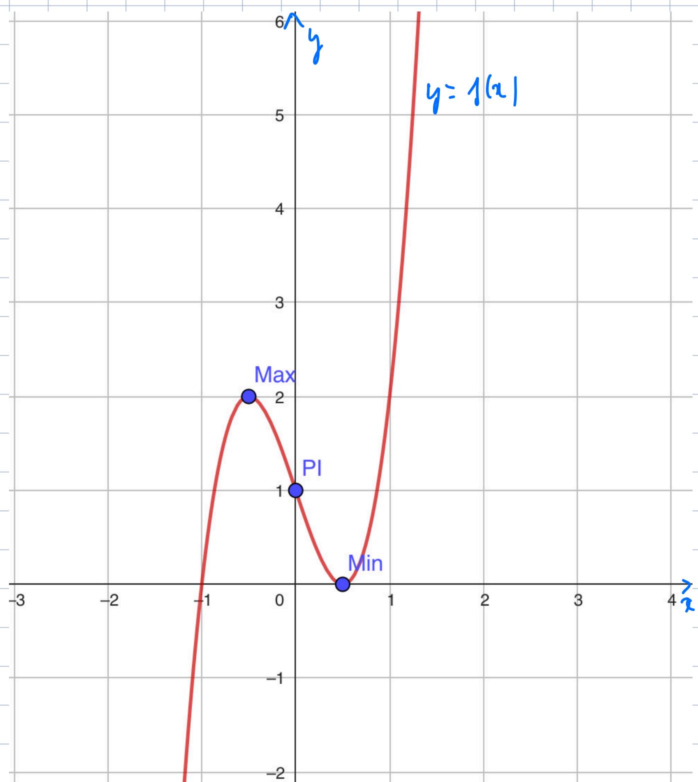
$\Rightarrow$ Max $\left(-\frac{1}{2} \ ; 2\right)$, Min $\left(\frac{1}{2} \ ; 0\right)$

* <u>courbure</u> :

$$f''(x) = 24x$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

PI $(0;1)$



d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

* $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$

* parité :

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{9-(-x)^2} = \frac{2x^2}{9-x^2} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ est paire}$$

* Tableau de signes :

zéros de $f(x)$: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{9-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$

* Asymptotes :

- AV :

$$\lim_{x \to -3} f(x) \overset{\text{"}\frac{18}{0}\text{"}}{=} \begin{cases} < & -\infty \\ > & +\infty \end{cases} \Rightarrow AV : x = -3$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \overset{\text{"}\frac{18}{0}\text{"}}{=} \begin{cases} < & +\infty \\ > & -\infty \end{cases} \Rightarrow AV : x = 3$$

- AH / AO :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

$\Rightarrow$ AH : $y = -2$

$\Rightarrow$ Étude de position : $\delta(x) = f(x) + 2 = \dfrac{2x^2}{9-x^2} + 2 = \dfrac{18}{\underbrace{9-x^2}_{(3-x)(3+x)}}$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	
position		Dessous	||	Dessus	||	Dessous	

* Croissance :

$$f'(x) = \frac{4x(9-x^2) - 2x^2(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{36x}{(9-x^2)^2}$$

$\Rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $x = 0$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	||	$\nearrow$	-2

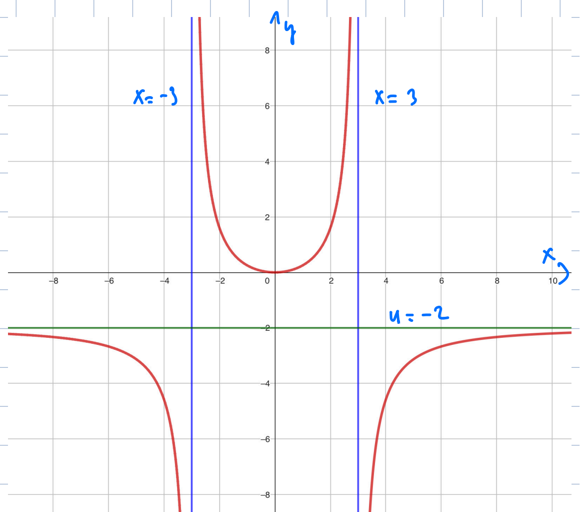
Min $(0;0)$

* Courbure :

$$f''(x) = \frac{36(9-x^2)^2 - 36x \cdot 2(9-x^2)\cdot(-2x)}{(9-x^2)^4} = \frac{36(9-x^2)\left[9-x^2+4x^2\right]}{(9-x^2)^4}$$

$$= \frac{108(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	
$f(x)$		$\cap$	||	$\cup$	||	$\cap$	



e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

* $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$

* Parité :

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ est impaire}$$

* Tableau de signes:

zéros : $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

* Asymptotes :

- AV :

$$\lim_{x \to -2} f(x) \underset{=}{"\tfrac{-8}{0}"} \begin{cases} < & -\infty \\ > & +\infty \end{cases} \Rightarrow AV : x = -2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \underset{=}{"\tfrac{8}{0}"} \begin{cases} < & -\infty \\ > & +\infty \end{cases} \Rightarrow AV : x = 2$$

- AH / AO : par AH

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 \quad -4x} & x \\ 4x & \end{array} \Rightarrow AO : y = x$$

$\Rightarrow$ Étude de position :

$$\delta(x) = \frac{4x}{x^2-4} \Rightarrow \text{zéro} : x = 0$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	|	$-$	‖	$+$
position	Dessous	‖	Dessus	∩	Dessous	‖	Dessus

Intersection avec AO : $(0;0)$

* Croissance :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2\overbrace{(x^2-12)}^{x=\pm 2\sqrt{3}}}{(x^2-4)^2}$$

$\Rightarrow$ Zéros : $x=0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	‖	↘		↘	‖	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Max $(-2\sqrt{3}\,;-3\sqrt{3})$

Min $(2\sqrt{3}\,;3\sqrt{3})$

plat $(0;0)$

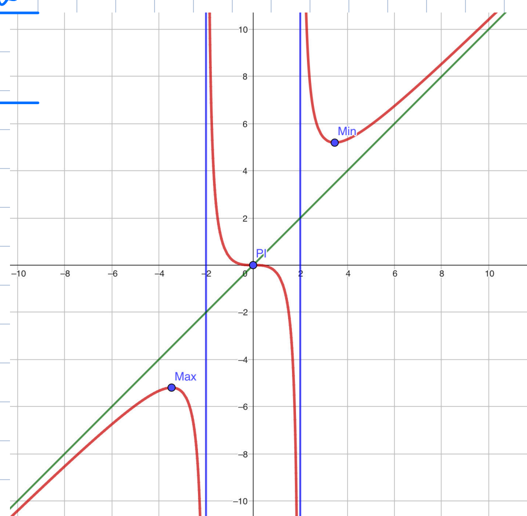
* Courbure :

$$f''(x) = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2 - (x^4-12x^2)2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-4)\left[(x^2-6)(x^2-4) - (x^4-12x^2)\right]}{(x^2-4)^4} = \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		∩	‖	∪		∩	‖	∪	

PI $(0;0)$



f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2}$

* $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

* Parité :

$f(x)$ ni paire, ni impaire

* Tableau de signe :

Zéro de $f(x)$: $f(x) = 0 \iff \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2} = 0 \implies x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

* Asymptotes :

- AV : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \overset{\text{"}\frac{27}{0^+}\text{"}}{=} +\infty \implies$ AV : $x = 2$

- AH / AO : pas AH

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(2-x)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 4}$$

$\implies f(x) = (x+7)(x^2 - 4x + 4) + 27x - 27$

$\implies$ AO : $y = x + 7$

$\implies$ Étude de position :

$$f(x) = \frac{27(x-1)}{(2-x)^2}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
position		Dessous	$\cap$ $(1;8)$	Dessus	||	Dessus	

Intersection avec AO : $(1;8)$

* Croissance :

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2(2-x)^2 - 2(x+1)^3(2-x)(-1)}{(2-x)^4} = \frac{(x+1)^2(2-x)\left[3(2-x)+2(x+1)\right]}{(2-x)^4}$$

$$= \frac{(x+1)^2(-x+8)}{(2-x)^3} \quad \Rightarrow \text{zéros : } x=-1 \ , \ x = 8$$

x	$-\infty$		-1		2		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{81}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Min $\left(8 ; \frac{81}{4}\right)$

plat $(-1 ; 0)$

* Courbure :

$$f''(x) = \frac{\left[2(x+1)(-x+8) + (x+1)^2(-1)\right](2-x)^3 - (x+1)^2(-x+8)3(2-x)^2(-1)}{(2-x)^6}$$

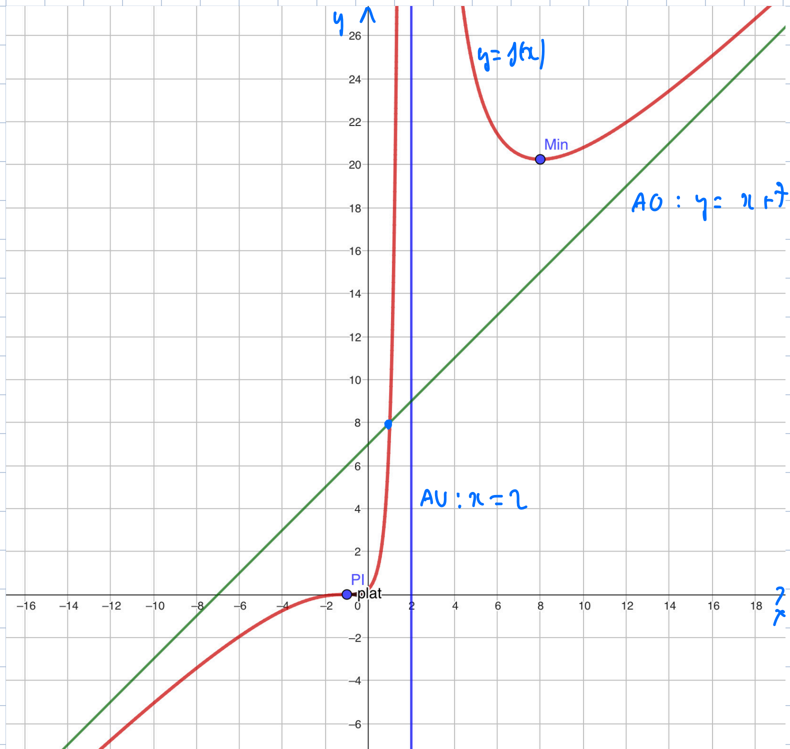
$$= \frac{(x+1)(-3x+15)(2-x)^3 + 3(x+1)^2(-x+8)(2-x)^2}{(2-x)^6}$$

$$= \frac{(x+1)(2-x)^2\left[(-3x+15)(2-x) + 3(x+1)(-x+8)\right]}{(2-x)^6}$$

$$= \frac{54(x+1)}{(2-x)^4} \quad \Rightarrow \text{zéro : } x = -1$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\cap$	PI	$\cup$	$\Vert$	$\cup$	

Point d'inflexion PI $(-1 ; 0)$



g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ → condition $1 - x^2 \geq 0 \iff \underbrace{(1-x)(1+x)}\geq 0$

* $ED_f = [-1 \,;\, 1]$

* <u>Parité :</u>
$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \Rightarrow$ fonction paire

* <u>Tableau de signes :</u>

zéros : $\sqrt{1-x^2} = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		////	0	+	0	////	

* <u>Asymptotes :</u>

pas d'asymptotes.

* Croissance :

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow ED_{f'} =]-1;1[$$

$\Rightarrow$ zéro : $x = 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		‖	$+$	0	$-$	‖	
$f(x)$		‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0 ‖	

Max $(0;1)$

* Courbure :

$$f''(x) \quad \frac{-1\sqrt{1-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+x^2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

x		-1		1	
$f''(x)$		‖	$-$	‖	
$f(x)$		‖	$\cap$	‖