Dérivées

CORRIGÉ

2.7.6 Sachant que $f'(2) = -1$ et que $f(2) = 4$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x = 2$.

$(t): \quad y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad$ où $\quad a = 2$

$\Rightarrow (t): \quad y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$\Rightarrow (t): \quad y - 4 = -1(x-2) \Rightarrow y = -x + 2 + 4$

$\Rightarrow \boxed{(t): \quad y = -x + 6}$

2.7.7 La droite d d'équation $y = -2x + 7$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 3$.
Déterminer $f'(3)$ et $f(3)$.

équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad y = x f'(3) - 3f'(3) + f(3)$$

on sait aussi que $y = -2x + 7$ est tangente à la courbe f au point d'abscisse $x = 3$

$$\Rightarrow \quad x f'(3) - 3f'(3) + f(3) = -2x + 7$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} f'(3) = -2 \\ -3f'(3) + f(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad -3(-2) + f(3) = 7$$

$$\Rightarrow \quad f(3) = 7 - 6 = 1$$

Donc $\boxed{f'(3) = -2 \quad \text{et} \quad f(3) = 1}$

2.7.8 Soit la fonction $f(x) = x^2 + 4$.

a) Calculer $f(5)$ et $f(5+h)$, avec $h \in \mathbb{R}$.

b) En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$ pour h non nul.

c) A l'aide d'un calcul de limite, déterminer le nombre dérivé de f en $x = 5$.

a) $f(5) = (5)^2 + 4 = 25 + 4 = \underline{29}$

$f(5+h) = (5+h)^2 + 4 = 25 + 10h + h^2 + 4 = \underline{29 + 10h + h^2}$

b) $\Rightarrow \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{29 + 10h + h^2 - 29}{h} = \dfrac{h^2 + 10h}{h} = \dfrac{\cancel{h}(h+10)}{\cancel{h}}$

$= \underline{h + 10}$

c) $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h + 10 = 10$

$\Rightarrow \underline{f'(5) = 10}$

2.7.9 Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

a) Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$, avec $h \in \mathbb{R}$.

b) En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ pour h non nul.

c) A l'aide d'un calcul de limite, déterminer le nombre dérivé de f en $x = -2$.

a) $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 4 = 4 - 6 - 4 = \underline{-6}$

$f(-2+h) = (-2+h)^2 + 3(-2+h) - 4 = 4 - 4h + h^2 - 6 + 3h - 4$

$f(-2+h) = \underline{h^2 - h - 6}$ avec $h \in \mathbb{R}$

b) $$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - h - 6 - (-6)}{h} = \frac{h^2 - h - 6 + 6}{h}$$

$$= \frac{h^2 - h}{h} = \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}} = \underline{h - 1}$$

c) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ici $a = -2$

$$\Rightarrow f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4 - \left[(-2)^2 + 3(-2) - 4\right]}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4 - (4 - 6 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4 + 6}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"!}}{=} \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} = \lim_{x \to -2} x + 1$$

$$\Rightarrow f'(-2) = -2 + 1 = \underline{-1}$$

2.7.11 Calculer $f'(x)$, à partir de la définition de la dérivée, si :

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = 2x - 5$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x-3}$

a) $f(x) = 0x + 4$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot (x+h) + 4 - 4}{h} \underline{= 0}$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 5 - (2x-5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2h \cancel{-5} - \cancel{2x} + \cancel{5}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2 \quad \Rightarrow \underline{f'(x) = 2}$$

c) $f(x) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+1} - \cancel{x^2} \cancel{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" si}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = 2x}$$

d) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3(x+h)+1} - \frac{1}{3x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x+1 - [3(x+h)+1]}{(3(x+h)+1)(3x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x+1 - 3(x+h) - 1}{h(3(x+h)+1)(3x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x} \cancel{+1} - \cancel{3x} - 3h \cancel{-1}}{h(3(x+h)+1)(3x+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h[3(x+h)+1][3x+1]} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(3(x+h)+1)(3x+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(3x+3h+1)(3x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{9x^2 + 3x + \underset{\downarrow\,0}{9xh} + \underset{\downarrow\,0}{3h} + 3x + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3}{9x^2 + 6x + 1} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

e) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{4(x+h)-1}{x+h+1} - \dfrac{4x-1}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(4(x+h)-1)(x+1) - (x+h+1)(4x-1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4x + 4h - 1)(x+1) - (4x^2 - x + 4xh - h + 4x - 1)}{h(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4x^2} + \cancel{4x} + \cancel{4hx} + 4h - \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{4x^2} + \cancel{x} - \cancel{4xh} + h - \cancel{4x} + \cancel{1}}{h(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{5}{(x+1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$$

g) $g(x) = \sqrt{x-3}$

$g'(x) = \left((x-3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}-1}(x-3)'$

$= \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$