

2.6 Asymptotes

2.6.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{(x + 2)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

* $E D_f : x^2 + 2x - 3 \neq 0 \quad (=, (x-1)(x+3) \neq 0$

$=, E D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

* Asymptotes

i) $AV : \odot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3}{4} =, \text{Trou} \left(1; \frac{3}{4} \right)$

$\odot \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \stackrel{0/0}{=} \begin{matrix} < & \frac{4}{0^+} = +\infty \\ & & \\ > & \frac{4}{0^-} = -\infty \end{matrix}$

$\begin{matrix} + & -3 & - & 1 & + \\ \oplus & & \ominus & & \oplus \end{matrix} \rightarrow \text{signe de } x^2 + 2x - 3$

$=, AV \text{ en } x = -3$

ii) $AH : \deg(N(x)) \leq \deg(D(x)) \quad \text{oui}$

$=, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$= 1 \quad \boxed{\text{AH en } y = 1}$$

iii) AO: condition $\deg(N(x)) = \deg(D(x)) + 1$ non

→ pas de AO

! on peut déterminer AH/AO par la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 2 & x^2 + 2x - 3 \\ - (x^2 + 2x - 3) & 1 \\ \hline 0x^2 - x + 1 & \end{array}$$

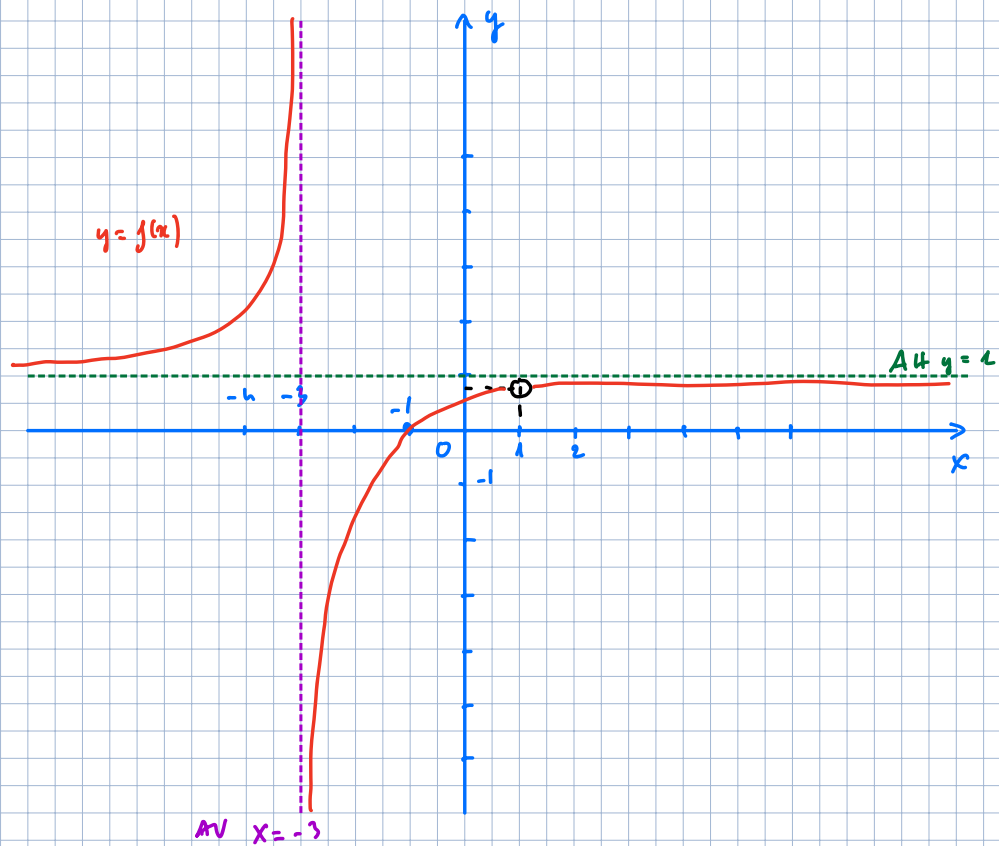
$$\text{donc } f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \underbrace{1}_{\text{AH}} + \underbrace{\frac{-x + 1}{x^2 + 2x - 3}}_{\delta(x)}$$

* Etude de position: on va étudier le signe de $\delta(x)$

$$\delta(x) = \frac{-x + 1}{x^2 + 2x - 3} \quad \rightarrow \quad -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$-x + 1$	+	+	0	-
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	+
$\delta(x)$	+	-	-	-
Position	Dessus	Dessous	Dessous	Dessous

* Trace du graphe :



b) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

* $\text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

* Asymptotes

i) AV : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \frac{7}{0}$

$\frac{7}{0^+} = +\infty$
 $\frac{7}{0^-} = -\infty$

$\frac{7}{0^+} = +\infty$
 $\frac{7}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow \text{AV en } x = 2$

ii) AH : condition: $\deg(N(x)) \leq \deg(D(x))$ NON
 $\rightarrow$ pas de AH

iii) AO : condition: $\deg(N(x)) = \deg(D(x)) + 1$ OUI

$\Rightarrow$ division euclidienne

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ - (x^2 - 2x) \\ \hline 3x + 1 \\ - (3x - 6) \\ \hline 7 \end{array}$$

$0x + 7$

$\Rightarrow \text{AO: } y = x + 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \underbrace{x + 3}_{\text{AO}} + \underbrace{\frac{7}{x - 2}}_{\text{S(x)}}$

* Étude de position:

$S(x) = \frac{7}{x - 2}$

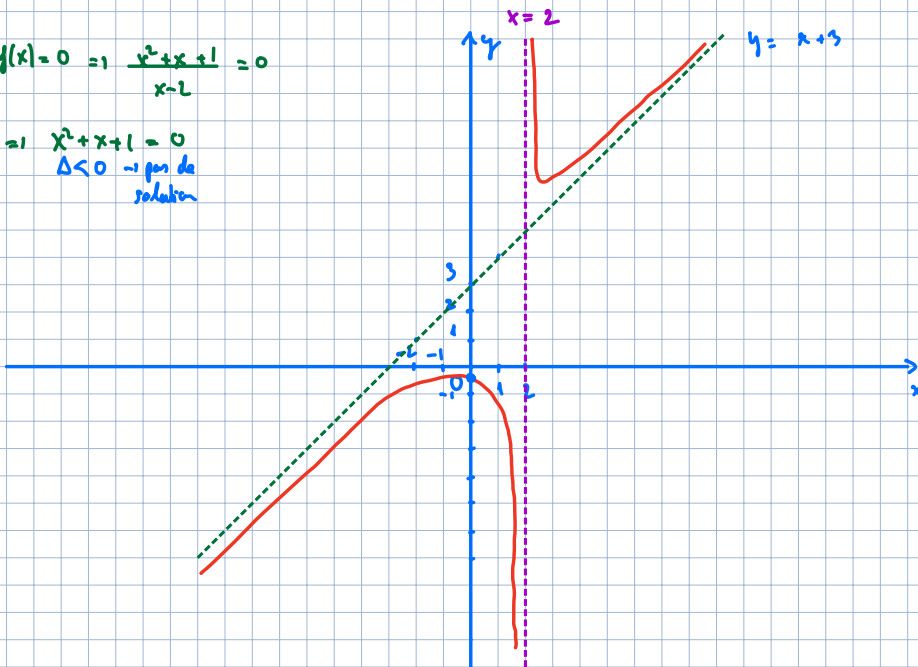
	$-\infty$	2	$+\infty$
7	+	+	+
$x - 2$	-	0	+
$S(x)$	-	+	+
position	Negatif		Positif

* Tracé du graphe :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$\Delta < 0 \rightarrow$ pas de solution



$$c) \quad f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x(x+3)}{x^2 + 4x + 4}$$

$$* \text{ED}_f : (x+2)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

* Asymptotes :

$$i) \text{ AV} : \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 6x}{\underbrace{(x+2)^2}_{(x+2)^2 \geq 0}} \stackrel{\frac{-4}{0^+}}{=} -\infty$$

$$\Rightarrow \text{AV en } x = -2$$

$$ii) \text{ AH} : \text{condition : } \deg(N(x)) \leq \deg(D(x)) \text{ oui}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\Rightarrow \text{AH en } y = 2$$

$$\text{ou : } \begin{array}{l|l} 2x^2 + 6x & x^2 + 4x + 4 \\ - 2x^2 + 8x + 8 & 2 \\ \hline 0 & -2x - 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{2}_{\text{AH}} + \frac{-2x - 8}{\underbrace{(x+2)^2}_{f(x)}}$$

$$iii) \text{ AO} : \deg(N(x)) \neq \deg(D(x)) + 1 \rightarrow \text{NON}$$

pas de AO

* Etude de position:

$$g(x) = \frac{-2x-8}{(x+2)^2} \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x-8}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = -4$$

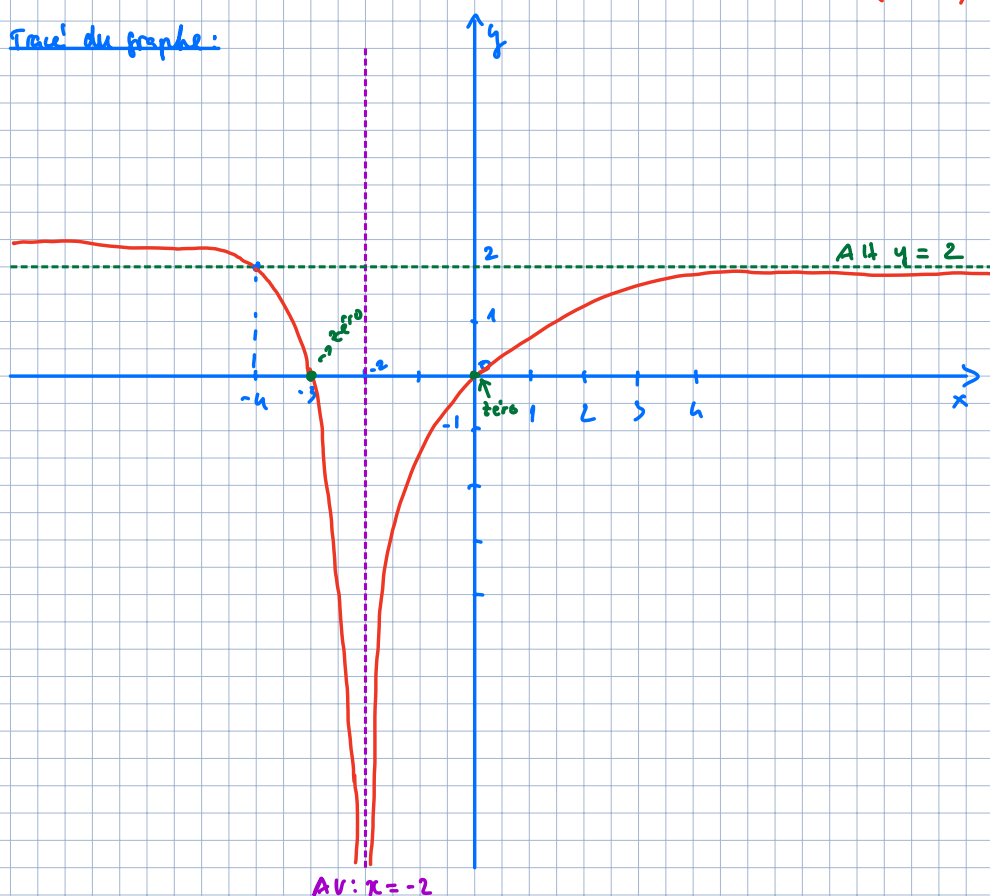
Tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
$-2x-8$	+	$\odot$	-	-
$(x+2)^2$	+	+	$\odot$	+
$g(x)$	+	$\odot$	-	-
position	Dessus	$\odot$	Dessous	Dessous

Dessus $\cap$ Dessous

intersection avec AH en $(-4; 2)$

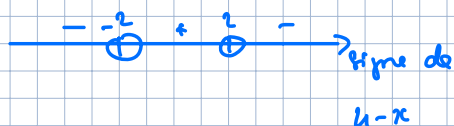
* Trace du graphe:



$$d) f(x) = \frac{x^3}{4-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow E D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

* Asymptotes:

i) AV: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{4-x^2} \stackrel{\frac{-8}{0}}{=} \begin{matrix} < & +\infty \\ & \searrow \\ > & -\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = -2$



$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{4-x^2} \stackrel{\frac{8}{0}}{=} \begin{matrix} < & +\infty \\ & \searrow \\ > & -\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = 2$

ii) AH: pas de AH

iii) AO: $\frac{x^3}{4-x^2} = \frac{-x^3+4x}{0+4x} \quad \begin{matrix} -x^3+4 \\ \hline -x \end{matrix}$

$\Rightarrow \text{AO: } y = -x$

$\Rightarrow f(x) = x + \underbrace{\frac{4x}{4-x^2}}_{g(x)}$

* Étude de position:

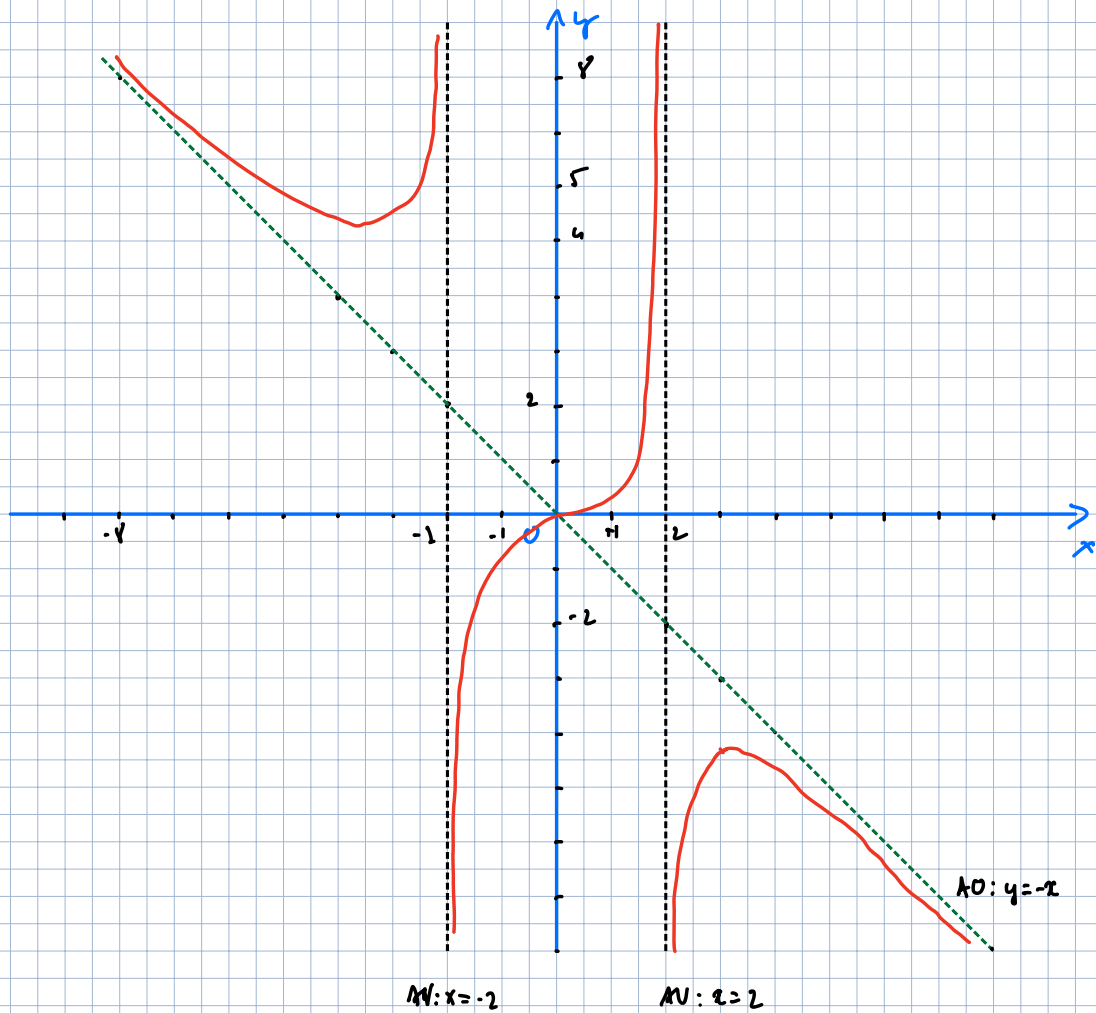
$$g(x) = \frac{4x}{4-x^2}$$

Tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$4x$	-	-	0	+	+
$4-x^2$	-	0	+	0	-
$g(x)$	+	-	0	+	-
position	dessus	dessus	dessus	dessous	dessous

* Trace' du graphique:

Intersection avec AH : (0;0)



$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x(x-4)}{(x-3)(x-1)}$$

* ED:

$$ED_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$$

* Asymptote:

i) AV:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\frac{-3}{0}}{=} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = 3$$



ii) At:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x & x^2 - 4x + 3 \\ -x^2 - 4x + 3 & 1 \\ \hline -3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{At: } y = 1$$

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\downarrow$$

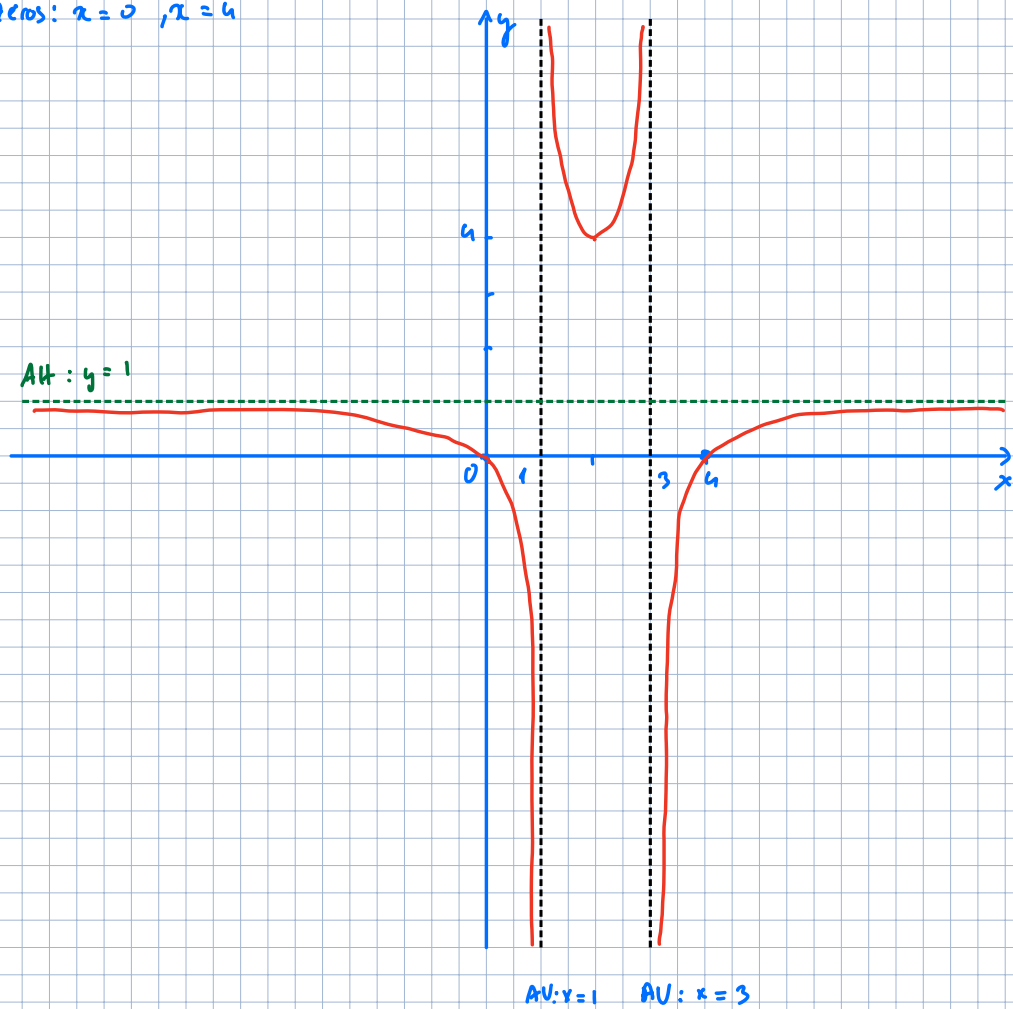
$$g(x) = \frac{-3}{x^2 - 4x + 3}$$

* Tableau de signes de $g(x)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
-3	-	-	-	-
$x^2 - 4x + 3$	+	0	0	+
$g(x)$	-	+	-	-
position	Dehors	Dehors	Dehors	Dehors

* Trace du profil:

zeros: $x=0$, $x=4$



$$f) \quad f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{(x-2)(x+2)}$$

* ED : $ED_f = \{ -2 ; 2 \}$

* Asymptotes:

i) AV: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{-18}{0}}{=} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = -2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{-2}{0}}{=} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{AV en } x = 2$

$\begin{array}{c} - \\ \circledast \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \circledast \\ - \end{array} \rightarrow \text{signe de } x^2 - 4$

ii) AO:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

$\Rightarrow \text{AO: } y = x - 3$

$$= S(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} - (x - 3) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} - x + 3$$

$$= \frac{4x - 10}{x^2 - 4}$$

ou par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 + 2 & x^2 - 4 \\
 \underline{-(x^3 - 4x)} & x - 3 \\
 0 - 3x^2 + 4x + 2 & \\
 \underline{-(3x^2 - 12x + 12)} & \\
 0 + 4x - 10 &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 u = x - 3 \quad \text{AO} \\
 \\
 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = x - 3 + \underbrace{\frac{4x - 10}{x^2 - 4}}_{f(x)}$$

* Tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	2	$5/2$	$+\infty$
$4x - 10$	-	-	-	$\circ$	+
$x^2 - 4$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$g(x)$	-		+		+
position	Dessous		Dessus		Dessus

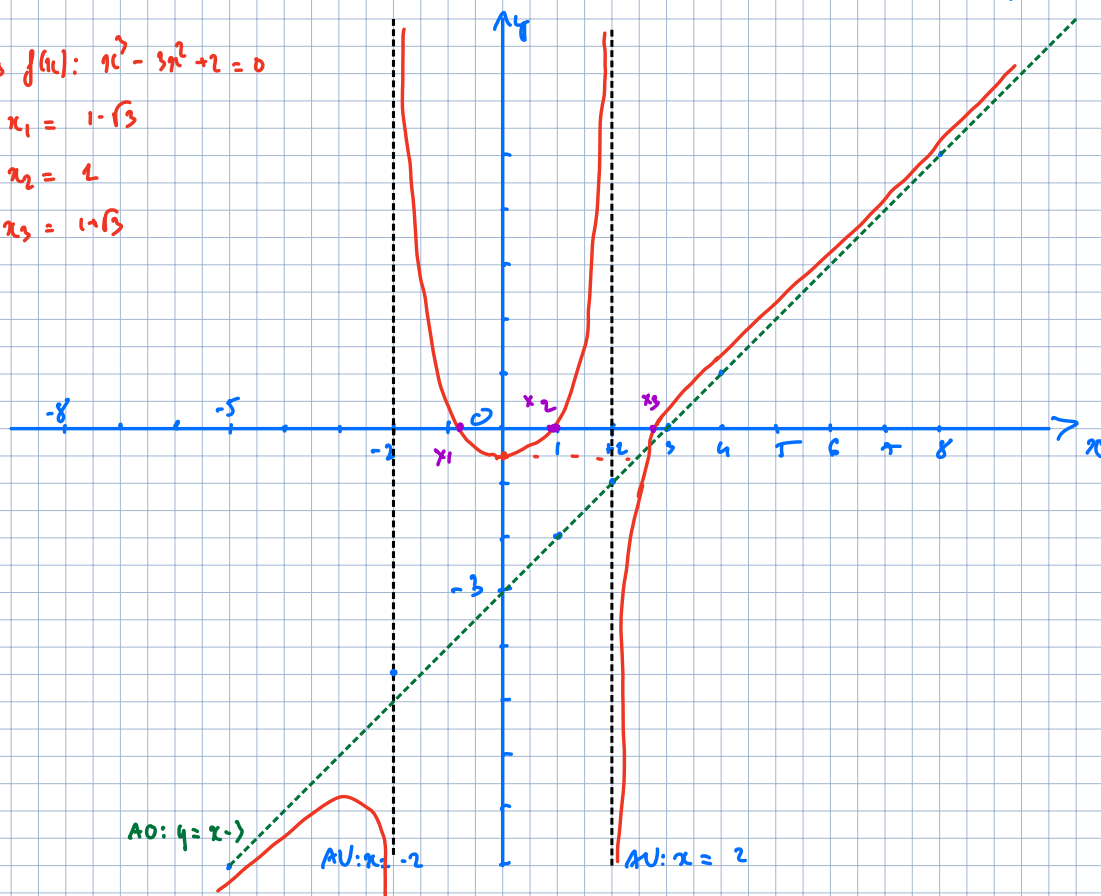
Interdiction avec AO : $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

* Zéros $f(x)$: $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$x_1 = 1 - \sqrt{3}$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1 + \sqrt{3}$



2.6.4 Trouver une fonction admettant les asymptotes suivantes :

a) $x = -4, x = 2, y = 3$

b) $y = 2x - 5, x = 1$

a) $x = -4, x = 2 : \text{as} \text{ AV}$

$$\Rightarrow D(x) : (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{N(x)}{(x+4)(x-2)}$$

On sait aussi que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{(x+4)(x-2)} = 3 \leftarrow \text{AH}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x^2 + 2x - 8} = 3 \quad \text{c-à-d} \quad N(x) : ax^2 \quad \text{car}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = 3 \Rightarrow a = 3$$

Donc $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 8}$

b) $y = 2x - 5, x = 1$

$$y = 2x - 5 : \text{AO}$$

$$x = 1 : \text{AV} \Rightarrow D(x) : x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x-1}$$

2.6.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^n + 3}{x^2 - 9}$.

$$f(x) = \frac{x^n + 3}{x^2 - 9} = \frac{x^n + 3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\star \quad n=0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \text{AV: } x=3, x=-3$$

$$\text{AH: } y=0$$

$$\star \quad n=1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \text{AV: } x=3$$

$$\text{pour } (-3; -\frac{1}{2})$$

$$\text{AH: } y=0$$

$$\star \quad n=2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2+3}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \text{AV: } x=3, x=-3$$

$$\text{AH: } y=x$$

$$\star \quad n=3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3+3}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \text{AV: } x=3, x=-3$$

$$\text{AO: } y=x$$

$$\star \quad n \geq 4 \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = \frac{x^n+3}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \text{AV: } x=3, x=-3$$

$$\text{par AH, par AO}$$

2.6.6 Déterminer a , b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$$

admet les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ comme asymptotes.

$$x=0, x=2 \Rightarrow AV \Rightarrow x(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + c = x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + c = x^2 - 2x + 0$$

$$\Rightarrow b = -2 \text{ et } c = 0$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x}$$

$$\text{on sait que } y=1 \text{ est une AH} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x}$$

2.6.7 Déterminer a , b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

admet les droites $x = 3$ et $y = x + 2$ comme asymptotes.

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta V \Rightarrow 0(x) = x - 3$$

$$y = x + 2 \Rightarrow \Delta 0$$

$$y = mx + h = x + 2 \Rightarrow m = 1, h = 2$$

$$\text{alors : } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx}{x + c}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{x(x + c)}$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + bx}{x + c} - x \right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + bx - x(x + c)}{x + c} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + bx - x^2 - cx}{x + c} \right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx - cx}{x + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(b - c)}{x + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b - c}{1 + \frac{c}{x}} = 2$$

$$\Rightarrow b - c = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3}$$

2.6.8 Déterminer a , b , c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

dont le graphe passe par le point $A(2; -2)$ et qui admet les droites $x = -3$ et $y = -2x + 1$ comme asymptotes.

$$\bullet \quad x = -3 \Rightarrow \text{AV} : x = -3 \Rightarrow x + d = x + 3 \Rightarrow d = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 3}$$

$$\bullet \quad y = -2x + 1 \Rightarrow \text{AO} \Rightarrow m = -2 \text{ et } h = 1$$

$$\bullet \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx + c}{x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x(x + 3)} = -2$$

$x^2 + 3x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} a = -2 \Rightarrow a = -2$$

$$\bullet \quad h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-2x^2 + bx + c}{x + 3} - (-2)x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2 + bx + c + 2x(x + 3)}{x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2 + bx + c + 2x^2 + 6x}{x + 3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 6x + c}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(b + 6) + c}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(b + 6)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} b + 6 = 1 \Rightarrow b + 6 = 1 \Rightarrow b = -5$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 - 5x + c}{x + 3}$$

on sait que $f(x)$ passe par $A(2; -2)$

$$\Rightarrow f(2) = -2 \Rightarrow \frac{-2(2)^2 - 5(2) + c}{2 + 3} = -2 \Rightarrow \frac{-8 - 10 + c}{5} = -2$$

$$\Rightarrow -18 + c = -10 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow \text{Donc } f(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 8}{x + 3}$$