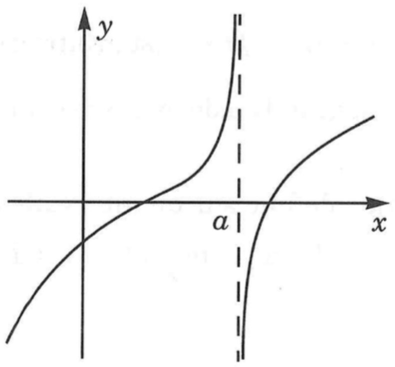
Asymptotes

1) Asymptotes verticales

Définition

> La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} |f(x)| = +\infty$ ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} |f(x)| = +\infty$.

Illustration



Remarque

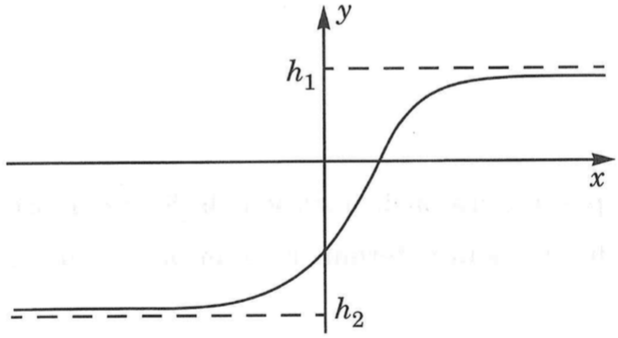
Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$. Les asymptotes verticales de f sont à chercher parmi les droites d'équation $x = a$ où a est un zéro du polynôme $d(x)$.

2) Asymptotes affines

Définitions

> La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = h_1$.
>
> La droite d'équation $y = h_2$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h_2$.

Illustration



Remarque

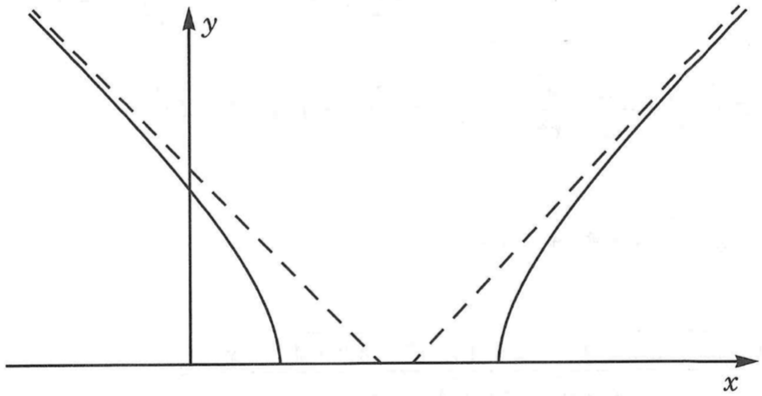
Une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si $\deg(n(x)) \leq \deg(d(x))$. Si f admet une asymptote horizontale, celle-ci est la même à gauche et à droite:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Définitions

> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $+\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.
>
> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $-\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \delta(x) = 0$.

Illustration



Le signe de $\delta(x)$ permet de déterminer la position relative du graphe et de l'asymptote.

Remarque

Si $f(x)$ ne peut pas s'écrire facilement sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$, on peut déterminer m et h en calculant les limites suivantes

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

La situation est analogue pour $x \to -\infty$.