CORRIGÉ

Applications de la dérivée

2.8.6 Déterminer $k \in \mathbb{R}^*$ de telle sorte que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+k}$ admette un extremum dont l'ordonnée est égale à 8. Préciser ses coordonnées, sa nature (minimum ou maximum) et son type (global ou local).

$$f(x) = \frac{x^2}{x+k} \quad , \quad k \in \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+k) - x^2(1)}{(x+k)^2} = \frac{2x^2 + 2xk - x^2}{(x+k)^2} = \frac{x^2 + 2xk}{(x+k)^2}$$

$$= \frac{x(x+2k)}{(x+k)^2}$$

$\Rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $\dfrac{x(x+2k)}{(x+k)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x+2k) = 0$

$\rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -2k$

* $f(x)$ possède un extremum dont l'ordonnée $= 8$

$\Rightarrow$ c'est $x = -2k$, le zéro de $f'(x)$

$\Rightarrow f(-2k) = \dfrac{4k^2}{-k} = -4k = 8 \Rightarrow k = -2$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ et $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$; $ED_f = ED_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

zéros de f' : $x = 0$, $x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Minimum local en } (4;8)}$

2.8.7 Étudier la courbure des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

c) $f(x) = (x-1)^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

MRJ ~~g)~~ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

MRJ ~~h)~~ $f(x) = \cos^2(x)$, sur $[0; 2\pi]$

a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

$ED_f = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 6x + 8 \Rightarrow f''(x) = 6$

$\Rightarrow$ Courbure :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	$\cup$	

b) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

$ED_f = \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$

$\rightarrow$ zéro de $f''(x)$: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Courbure :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

Point d'inflexion PI en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 8 \rightarrow PI(0;8)$

c) $f(x) = (x-1)^4 \rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x-1)^3 \cdot 1 \Rightarrow f''(x) = 12(x-1)^2 \cdot 1 = 12(x-1)^2$

$\rightarrow$ Zéros de $f''(x)$: $12(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ Courbure :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cup$	

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)\,2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2\cancel{(x^2+1)}\left(-(x^2+1)+4x^2\right)}{\cancel{(x^2+1)}^4}$$

$$= \frac{2(-x^2-1+4x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$\Rightarrow$ Zéros de $f''(x)$: $\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2(3x^2-1) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ <u>Courbure</u> :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

PI_1 PI_2

Points d'inflexion : $PI_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{3}{4}\right)$, $PI_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{3}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$ $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1(x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ $\Rightarrow ED_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow$ <u>Courbure</u> :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\cap$	$\Vert$	$\cup$	

j) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \Rightarrow ED = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2(x^3+1) - (x^3-1)(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$

$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{12x(x^3+1)^2 - 6x^2 \cdot 2(x^3+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^4} = \dfrac{12x\cancel{(x^3+1)}\left[x^3+1-3x^3\right]}{(x^3+1)^{\cancel{4}}}$

$= \dfrac{12x(-2x^3+1)}{(x^3+1)^3}$

$\Rightarrow$ zéros de $f''(x)$: $\dfrac{12x(-2x^3+1)}{(x^3+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 12x(-2x^3+1) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{12x = 0}_{x=0}$ ou $-2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow$ <u>Courbure</u> :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\cup$	||	$\cap$		$\cup$		$\cap$	
					$\uparrow$ PI_1		$\uparrow$ PI_2		

Points d'inflexion : $PI_1\left(0 ; \underbrace{-1}_{f(0)=-1}\right)$; $PI_2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -\dfrac{1}{3}$

2.8.8 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 3x^2$ en son point d'inflexion.

Rappel : (t) : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

ici, a est l'abscisse du point d'inflexion.

$\Rightarrow$ $f(x) = x^3 - 3x^2$ $\rightarrow$ $ED_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ $\Rightarrow$ $f''(x) = 6x - 6$ $\Rightarrow$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ Courbure :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	
			$\uparrow$ PI		

Point d'inflexion PI$(1 ; -2)$

$\Rightarrow$ Abscisse du point d'inflexion : $x = 1 = a$

$\Rightarrow$ $f(a) = f(1) = -2$

$f'(a) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$

$\Rightarrow$ (t) en $x = 1$: $y - (-2) = -3(x-1)$ $\Rightarrow$ $y + 2 = -3x + 3$

$\Rightarrow$ $y = -3x + 3 - 2$

$\Rightarrow$ $\boxed{(t) : \quad y = -3x + 1}$

2.8.9 Déterminer les paramètres a, b et c tels que $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ admette en $x = 1$ un point d'inflexion en lequel la tangente au graphe soit la droite d'équation $y = 16x - 5$.

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$

$f(x)$ admet un PI en $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c$

$\Rightarrow f(1) = 1 + a + b + c$

* "$f(x)$ admet en $x = 1$ en lequel la tangente au graphe : $y = 16x - 5$"

$\Rightarrow$ $x = 1$ est la solution de $y = 16x - 5$

$\Rightarrow y = 16 \cdot 1 - 5 = 16 - 5 = 11$

$\Rightarrow f(1) = 1 + a + b + c = 11 \Rightarrow a + b + c = 10 \quad (1)$

* $(t) : y = 16x - 5$

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 16 \Rightarrow 4 + 3a + 2b = 16$

$\Rightarrow 3a + 2b = 12 \quad (2)$

$\Rightarrow$ Point d'inflexion $\Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow f''(1) = 12 \cdot 1^2 + 6a1 + 2b = 0$

$\Rightarrow 12 + 6a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = -12 \quad (3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 10 \\ 3a + 2b = 12 \quad | \cdot (-1) \\ 6a + 2b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 10 \\ -3a - 2b = -12 \\ 6a + 2b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 10 \\ \\ 3a = -24 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = -8$

$\Rightarrow \quad b = \dfrac{12 + 24}{2} = 18$

$\Rightarrow \quad c = 10 + 8 - 8 = 0$

d'où $\quad f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-3)(x-1)$

$\Rightarrow$ Courbure :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			PI_1		PI_2		

Points d'inflexion : $PI_1(1 ; 11)$; $PI_2(3 ; 27)$

$f(1) = 11$ $\qquad f(3) = 27$