CORRIGÉ

Applications de la dérivée

2.8.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

MRf e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x^2}$

MRf ~~f)~~ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin(x)}$

MRf g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)-\pi/2}$

MRf ~~h)~~ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x(2\arctan(x)-\pi)$

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" fi}}{\underset{\text{B-H}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+4x+1}{2x-3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

b) $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" fi}}{\underset{\text{B-H}}{=}} \lim_{x\to -3}\frac{2x+2}{4x+3} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

c) $$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" fi}}{\underset{\text{B-H}}{=}} \lim_{x\to 4}\frac{1}{\left((x+4)^{\frac{1}{3}}-2\right)'} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\frac{1}{3}(x+4)^{\frac{1}{3}-1}}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\frac{1}{3}(x+4)^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{12}} = \boxed{12}$$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2} \underset{B-H}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\left(3 - \sqrt{x+6}\right)'}{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)'}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\left(-(x+6)^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right)'} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-\frac{1}{2}(x+6)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}$

$= \lim\limits_{x \to 3} -\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}} = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$

2.8.2 Étudier la croissance des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $f(x) = x^2\sqrt{6-x^2}$

h) $f(x) = \sin(x)(1+\cos(x))$, sur $[0; 2\pi]$

a) $f(x) = x^3 - 3x$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* $f'(x) = 3x^2 - 3$ $\Rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $3(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow ED_{f'} = \mathbb{R}$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Max } (-1 ; 2) \quad \text{Min } (1 ; -2)}$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* $f'(x) = -4x^3 + 4x$ $\rightarrow$ zéros de $f'(x)$: $-4x(x^2 - 1) = 0$

$ED_{f'} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	13	$\searrow$	12	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{\text{Max } (-1 ; 13), \text{Max}(1;13) \quad \text{Min } (0 ; 12)}$

c) $f(x) = (x+2)^3 (x-3)^2$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* $f'(x) = 3(x+2)^2 \cdot (x-3)^2 + (x+2)^3 \cdot 2(x-3)$

$= (x+2)^2 (x-3) \big(3(x-3) + 2(x+2) \big)$

$= (x+2)^2 (x-3) (3x - 9 + 2x + 4) = (x+2)^2 (x-3) (5x-5)$

$= 5(x+2)^2 (x-3)(x-1)$

$\Rightarrow ED_{f'} = \mathbb{R}$

* zéros de $f'(x)$: $5(x+2)^2 (x-3)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 3$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			108	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

plat $(-2;0)$

Max $(1;108)$

Min $(3;0)$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

* $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

* $f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x-3)(1)}{(x+5)^2} = \dfrac{13}{(x+5)^2}$

$\Rightarrow ED_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	2

$\Rightarrow$ pas d'extremum

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

* $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

* $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+2) - (x-1)^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$

$\Rightarrow ED_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

* zéros de $f'(x)$: $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -5$, $x_2 = 1$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-12	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

$\boxed{\text{Max } (-5\,;-12) \;,\; \text{Min } (1\,;0)}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

* $ED_f = \mathbb{R}$

* $f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} \implies ED_{f'} = \mathbb{R}$

* zéros de $f'(x)$: $x = -1$ et $x = 1$

* <u>Tableau de croissance :</u>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$\implies$ $\boxed{\text{Min}\left(-1 ; -\tfrac{1}{2}\right) , \text{Max}\left(1 ; \tfrac{1}{2}\right)}$