2.7.2

a) $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $\qquad \sqrt{\frac{x}{x+1}}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad ED(f)=]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} x\sqrt{\frac{x}{x+1}} \overbrace{=}^{\frac{-1}{0+}} -\infty \quad\Rightarrow\quad \text{AV}: x=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\frac{x}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x}}+1}=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \text{AO}: y=x-\frac{1}{2}$$

b) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ $\qquad x^2-1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad ED(f)=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

pas d'AV

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) \overbrace{=}^{-\infty+\infty \text{ fi}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0 \quad\Rightarrow\quad \text{AH}: y=0\ (x\to-\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{x^2-1}) \overbrace{=}^{-\infty+\infty \text{ fi}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$$

$\Rightarrow \quad \text{AO}: y=2x\ (x\to+\infty)$

c) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x-3}}$ $\qquad \frac{1}{x-3}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad ED(f)=]3;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\sqrt{\frac{1}{x-3}} \overbrace{=}^{\frac{1}{0_+}} +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{AV} : x=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x-3}}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{AH} : y=0\ (x\to+\infty)$$

d) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}}$ $\qquad \frac{1}{(x-3)^2}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad ED(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}} \overbrace{=}^{\frac{1}{0_+}} +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{AV} : x=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{AH} : y=0$$

e) $f(x)=2x-3-\sqrt{4x^2+6x}$ $\qquad 4x^2+6x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad ED(f)=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup[0;+\infty[$

pas d'AV

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3-\sqrt{4x^2+6x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{4x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x}=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-4x)\ \lim_{x\to-\infty}(-2x-3-\sqrt{4x^2+6x}) \overbrace{=}^{+\infty-\infty \text{ fi}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x-3-\sqrt{4x^2+6x})(-2x-3+\sqrt{4x^2+6x})}{-2x-3+\sqrt{4x^2+6x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+9}{-2x-3+\sqrt{4x^2+6x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x+\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x+2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x+2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-4x}=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{AO} : y=4x-\frac{3}{2}\ (x\to-\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}2x-3-\sqrt{4x^2+6x} \overbrace{=}^{\infty-\infty \text{ fi}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3-\sqrt{4x^2+6x})(2x-3+\sqrt{4x^2+6x})}{2x-3+\sqrt{4x^2+6x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-18x+9}{2x+\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-18x}{2x+2|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-18x}{2x+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-18x}{4x}=-\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{AH} : y=-\frac{9}{2}\ (x\to+\infty)$$