Dérivées

2M

CORRIGÉ

~~2.8.2~~ 2.7.12 On donne la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 + (x+h) + 2 - (x^2 + x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2x - h + 1)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -2x - h + 1 = \underline{-2x + 1}$$

b) $m = f'(x)$

$\Rightarrow$ intersection avec les axes :

* Avec Ox $\Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$

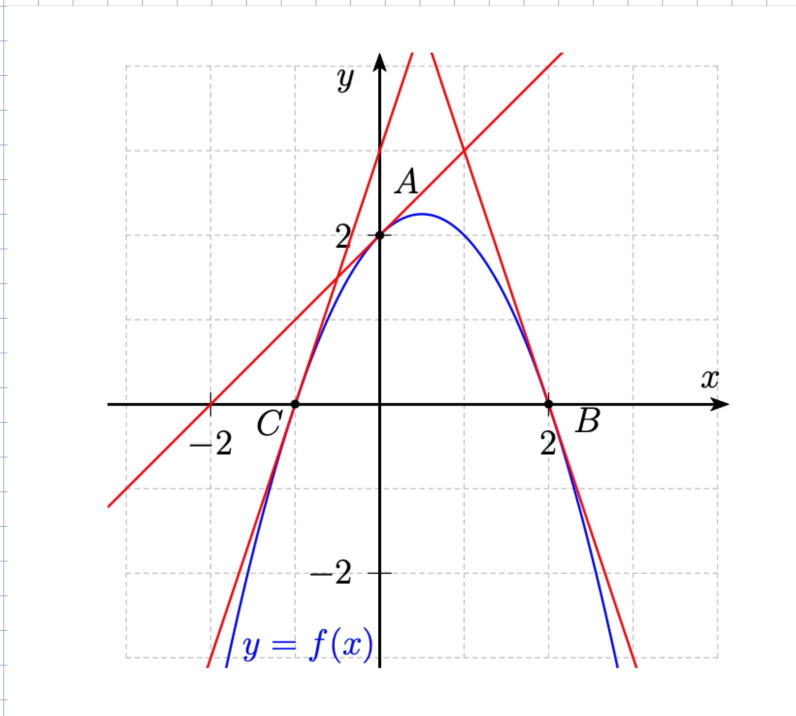
* Avec Oy $\Rightarrow x = 0$

$+ \quad m_1 = f'(0) = \underline{1}$

$m_2 = f'(2) = \underline{-3}$

$m_3 = f'(-1) = \underline{3}$

c)



2.7.13 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?

a) $f(x) = |x-2|$, $a = 2$

b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$, $a = 0$ MRF

MRF c) $f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)}$, $a = -\frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = |x^2-1| - 2$, $a = -1$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \xrightarrow{<} \underline{-1} \\ \xrightarrow{>} \underline{+1} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\underline{f \text{ n'est pas dérivable en } 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0$

$\Rightarrow$ f est dérivable en 0

c) $$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \sin(2x)}}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)}}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\left(\sin(x) + \cos(x)\right)^2}}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\left|\sin(x) + \cos(x)\right|}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{t \to 0} \frac{\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{t}$$

poser $x + \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left|\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left|\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{\left|\cos(t)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{\left|\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}{t}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t \to 0} \frac{|\sin(t)|}{t} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t \to 0} \frac{|\sin(t)|}{t} = \sqrt{2} \lim_{t \to 0} \frac{|\sin(t)|}{t}$$

i) $$\sqrt{2} \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{|\sin(t)|}{t} = -\sqrt{2}$$

ii) $$\sqrt{2} \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{|\sin(t)|}{t} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en $-\frac{\pi}{4}$

d) $$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{|x^2 - 1| - 2 + 2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{|x^2 - 1|}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{|(x-1)(x+1)|}{x+1} \begin{cases} < & -2 \\ > & 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en -1

2.7.14 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

On a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{0}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0} \quad \text{cqfd}$$

2.7.15 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en 0.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

a) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0$$

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ <u>f est continue en 0</u>

b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ peut prendre des valeurs entre -1 et 1

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ n'existe pas $\Rightarrow$ <u>f n'est pas dérivable en 0</u>

2.7.16 ~~2.2.6~~ On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la dérivée de f en $a \in]-1;1[$, puis étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

par définition :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-(a+h)^2} - \sqrt{1-a^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-(a+h)^2} + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-(a+h)^2} + \sqrt{1-a^2}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-a^2-2ah+h^2-1+a^2}{\sqrt{1-(a+h)^2}+\sqrt{1-a^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{-2a+h}{\sqrt{1-(a+h)^2}+\sqrt{1-a^2}} = \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}}$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas définie en -1 et 1, donc f n'est pas dérivable en -1 et 1.

2.7.18 ~~2.8~~ Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x+1)(x-3)$

b) $f(x) = x(x^2+5)$

c) $f(x) = (7x^2-4x+3)(5-2x)$

d) $f(x) = (2x-1)(2-2x)(1+x)$

e) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{2x^2-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-10x^2}{1-x}$

i) $f(x) = \dfrac{8x^2-8x+3}{4x^2-1}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

k) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{3x} + x$

a) $f(x) = (x+1)(x-3)$

$\Rightarrow f'(x) = 1\cdot(x-3) + (x+1)\cdot 1 = \underline{2x-2}$

b) $f(x) = x(x^2+5)$

$\Rightarrow f'(x) = 1\cdot(x^2+5) + x(2x) = \underline{3x^2+5}$

c) $f(x) = (7x^2-4x+3)(5-2x)$

$\Rightarrow f'(x) = (14x-4)(5-2x) + (7x^2-4x+3)(-2) = \underline{-12x^2+4x+4}$

d) $f(x) = (2x-1)(2-2x)(1+x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cdot(2-2x)(1+x) + (2x-1)(-2)(1+x) + (2x-1)(2-2x)(1)$

$= \underline{-12x^2+4x+4}$

e) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x-1}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-3(2x-1) - 2(4-3x)}{(2x-1)^2} = \dfrac{-6x+3-8+6x}{(2x-1)^2} = \underline{\dfrac{-5}{(2x-1)^2}}$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1(3-x)-(x-2)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+x-2}{(3-x)^2} = \frac{1}{(3-x)^2}$$

g) $f(x) = \frac{5}{2x^2-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{0\cdot(2x^2-1)-5(4x)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-20x}{(2x^2-1)^2}$$

h) $f(x) = \frac{x^3-10x^2}{1-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2-20x)(1-x)-(x^3-10x^2)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3+13x^2-20x}{(1-x)^2}$$

i) $f(x) = \frac{8x^2-8x+3}{4x^2-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(16x-8)(4x^2-1)-(8x^2-8x+3)(8x)}{(4x^2-1)^2} = \frac{32x^2-40x+8}{(4x^2-1)^2}$$

j) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+1)-x^3(1)}{(x+1)^2} = \frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$$

k) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 + \left(\frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\right) - \left(\frac{0\cdot x^2 - 2\cdot 2x}{x^4}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{4x}{x^4} = \frac{-1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{-x+4}{x^3}$$

l) $f(x) = \frac{x^3-4}{3x} + x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2\cdot 3x - 3(x^3-4)}{9x^2} + 1 = \frac{6x^3+9x^2+12}{9x^2} = \frac{2x^3+3x^2+4}{3x^2}$$

2.7.19 ~~2.0.9~~ Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, où a, b, c, d, h, m, t et w sont des constantes :

a) $f(x) = mx + h$

b) $f(x) = (w-1)x^3 + w(x-3)$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+t}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2ax + 2a}{x^2 + ax + a}$

a) $f(x) = mx + h$

$\Rightarrow f'(x) = m$

b) $f(x) = (w-1)x^3 + w(x-3)$

$\Rightarrow f'(x) = 3(w-1)x^2 + w$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

d) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{a(cx+d) - (ax+b)(c)}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+t}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1(x+t) - x(1)}{(x+t)^2} = \dfrac{x+t-x}{(x+t)^2} = \dfrac{t}{(x+t)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2ax + 2a}{x^2 + ax + a}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{(6x+2a)(x^2+ax+a) - (3x^2+2ax+2a)(2x+a)}{(x^2+ax+a)^2}$

$= \dfrac{6x^3 + 6ax^2 + 6ax + 2ax^2 + 2a^2x + 2a^2 - (6x^3 + 3x^2a + 4ax^2 + 2a^2x + 4ax + 2a^2)}{(x^2+ax+a)^2}$

$= \dfrac{ax^2 + 2ax}{(x^2+ax+a)^2}$

2.7.20 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+3)^4$

b) $f(x) = (3-x)^5$

c) $f(x) = (x^2+5x+1)^3$

d) $f(x) = (x^3-2x)^7$

e) $f(x) = x^2(5x+2)^3$

f) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$

g) $f(x) = (2x+5)^3(3x-1)^4$

h) $f(x) = (1-3x)^2(2-x)(x+3)^3$

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{(3x+2)^2}$

k) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$

a) $f(x) = (2x+3)^4$

$\Rightarrow f'(x) = 4(2x+3)^3(2) = \underline{8(2x+3)^3}$

b) $f(x) = (3-x)^5$

$\Rightarrow f'(x) = 5(3-x)^4(-1) = \underline{-5(3-x)^4}$

c) $f(x) = (x^2+5x+1)^3$

$\Rightarrow f'(x) = \underline{3(x^2+5x+1)^2(2x+5)}$

d) $f(x) = (x^3-2x)^7$

$\Rightarrow f'(x) = \underline{7(x^3-2x)^6(3x^2-2)}$

e) $f(x) = x^2(5x+2)^3$

$\Rightarrow f'(x) = 2x(5x+2)^3 + x^2 \cdot 3(5x+2)^2(5) = 2x(5x+2)^3 + 15x^2(5x+2)^2$

$= x(5x+2)^2\left[2(5x+2)+15x\right] = \underline{x(5x+2)^2(25x+4)}$

f) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$

$\Rightarrow f'(x) = 2(2+x)(1-x)^3 - 3(2+x)^2(1-x)^2$

$= (2+x)(1-x)^2\left[2(1-x) - 3(2+x)\right] = (2+x)(1-x)^2(-5x-4)$

$= \underline{-(2+x)(1-x)^2(5x+4)}$

g) $f(x) = (2x+5)^3(3x-1)^4$

$$\Rightarrow f'(x) = 6(2x+5)^2(3x-1)^4 + 12(2x+5)^3(3x-1)^3$$

$$= 6(2x+5)^2(3x-1)^3\left[3x-1+2(2x+5)\right]$$

$$= \underline{6(2x+5)^2(3x-1)^3(7x+9}$$

h) $f(x) = (1-3x)^2(2-x)(x+3)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = -6(1-3x)(2-x)(x+3)^3 - (1-3x)^2(x+3)^3 + 3(1-3x)^2(2-x)(x+3)^2$$

$$= (1-3x)(x+3)^2\left[-6(2-x)(x+3) - (1-3x)(x+3) + 3(1-3x)(2-x)\right]$$

$$= (1-3x)(x+3)^2\left(6x^2+6x-36+3x^2+8x-3+9x^2-21x+6\right)$$

$$= \underline{(1-3x)(x+3)^2(18x^2-7x-33)}$$

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{4x(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \underline{-\frac{4x}{(x^2+3)^3}}$$

j) $f(x) = \dfrac{x}{(3x+2)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(3x+2)^2 - 6x(3x+2)}{(3x+2)^4} = \frac{(3x+2)(3x+2-6x)}{(3x+2)^4}$$

$$= \underline{\frac{-3x+2}{(3x+2)^3}}$$

k) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3(1-x)^2(1+x)^2 - 2(1-x)^3(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{(1-x)^2(1+x)\left[-3(1+x)-2(1-x)\right]}{(1+x)^4} = \frac{(1-x)^2(-x-5)}{(1+x)^3}$$

$$= \underline{-\frac{(1-x)^2(x+5)}{(1+x)^3}}$$

l) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left[(x-3)^2 + 2x(x-3)\right](x-2)^2 - 2x(x-3)^2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)\left[(x-3+2x)(x-2) - 2x(x-3)\right]}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-3)\left[(3x-3)(x-2) - 2x(x-3)\right]}{(x-2)^3} = \frac{(x-3)(x^2-3x+6)}{(x-2)^3}$$

2.2.21 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

d) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 3}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

f) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

k) $f(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x - 2}{x + 1}}$

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

$$= x^{\frac{4}{7}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{7} x^{\frac{4}{7}-1} = \frac{4}{7} x^{-\frac{3}{7}} = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$$

d) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 3}$

$$= (8x^2 - 5x + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(8x^2-5x+3\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(16x-5\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(8x^2-5x+3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(16x-5\right)$$

$$= \frac{16x-5}{2\sqrt{8x^2-5x+3}}$$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$$= \left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

f) $f(x) = \sqrt{(4x^2-2x)^3}$

$$= \left(4x^2-2x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\left(4x^2-2x\right)^{\frac{3}{2}-1}\left(8x-2\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(4x^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(8x-2\right) = 3\sqrt{4x^2-2x}\,(4x-1)$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

$$= \left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2x+1\right) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

h) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$

$$= \left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\left(-2x\right) = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$$

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$= \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

k) $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = 1\cdot\sqrt{1-x} + (1+x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{2(1-x)-(1+x)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-3x+1}{2\sqrt{1-x}}$$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{3(x+1)-(3x-2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{5}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{3x-2}} = \frac{5}{2\sqrt{3x-2}\,\sqrt{(x+1)^3}}$$

2.7.22 MRf

~~2.3.12~~ Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \tan(x) - x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}$

g) $f(x) = \sin(2x)$

h) $f(x) = \sin^2(x)$

i) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

k) $f(x) = \tan^5(8x)$

l) $f(x) = \sqrt{1-\tan(2x)}$

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \underline{\cos(x) - 2\sin(x)}$

b) $f(x) = \tan(x) - x$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\tan^2(x)}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{0\cdot\sin(x) - 1\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} = \underline{-\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)\left(1+\cos(x)\right) - \sin(x)\left(-\sin(x)\right)}{\left(1+\cos(x)\right)^2} =$

$= \dfrac{1+\cos(x)}{\left(1+\cos(x)\right)^2} = \underline{\dfrac{1}{1+\cos(x)}}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\sin(x)(\cos(x)+3) - (\cos(x)+2)(-\sin(x))}{(\cos(x)+3)^2}$

$= \dfrac{-\sin(x)\cancel{\cos(x)} - 3\sin(x) + \sin(x)\cancel{\cos(x)} + 2\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2}$

$= \dfrac{-\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)(1-\sin(x)) - (\sin(x)+1)(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2}$

$= \dfrac{\cos(x) - \cancel{\cos(x)\sin(x)} + \cancel{\cos(x)\sin(x)} + \cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$

$= \dfrac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$

g) $f(x) = \sin(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x)$

h) $f(x) = \sin^2(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3\cdot 4\left(-\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 12\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \underline{\frac{3\cos(3x)\cos(5x) + 5\sin(3x)\sin(5x)}{\cos^2(5x)}}$$

k) $f(x) = \tan^5(8x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 5\tan^4(8x)\cdot\left(\tan(8x)\right)'$$

$$= 5\tan^4(8x)\cdot\frac{1}{\cos^2(8x)}\cdot 8$$

$$= 40\tan^4(8x)\cdot\frac{1}{\underbrace{\cos^2(8x)}_{=}}$$

$$= \underline{40\tan^4(8x)\cdot\left(\tan^2(8x)+1\right)}$$

l) $f(x) = \sqrt{1-\tan(2x)}$

$$= \left(1-\tan(2x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\tan(2x)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\cdot\tan^2(2x)-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\tan(2x)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\left(\tan^2(2x)+1\right)\right)$$

$$= \frac{1\left(-2\left(\tan^2(2x)+1\right)\right)}{2\left(1-\tan(2x)\right)^{\frac{1}{2}}} = \underline{-\frac{1+\tan^2(2x)}{\sqrt{1-\tan(2x)}}}$$

2.7.24 ~~2.8.14~~ Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sachant que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$ et $f''(2) = 0$.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = -6x + 2a$

$f''(2) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0 \Rightarrow a = 6$

$f'(2) = 0 \Rightarrow -12 + 24 + b = 0 \Rightarrow b = -12$

$f(2) = -1 \Rightarrow -8 + 24 - 24 + c = -1 \Rightarrow c = 7$

D'où $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 7$

2.7.25 ~~2.8.15~~ Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a, si :

a) $f(x) = 1 + 2x - x^3$, $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $a = 3$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = 4$

MAJ d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$, $a = 0$

Équation de la tangente (t) à la courbe $y = f(x)$ au point $T(a\,;\,f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

a) $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$

$f'(x) = 2 - 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 2 - 3 = -1$

$\Rightarrow (t) : y - 2 = -1(x-1) \Rightarrow (t) : y = -x + 3$

b) $f(3) = \dfrac{6}{3} = 2$

$f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} \Rightarrow f'(3) = -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow (t) : y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x-3)$

$\Rightarrow (t) : y = -\dfrac{1}{3}x + 3$

c) $f(4) = \sqrt{9} = 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow (t) : y - 3 = \dfrac{1}{3}(x - 4) \Rightarrow (t) : y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

d) $f(0) = \dfrac{0}{1} = 0$

$f'(x) = \dfrac{\cos(x)\left(\sin(x) + \cos(x)\right) - \sin(x)\left(\cos(x) - \sin(x)\right)}{\left(\sin(x) + \cos(x)\right)^2}$

$= \dfrac{1}{\left(\sin(x) + \cos(x)\right)^2}$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow (t) : y - 0 = 1(x - 0)$

$\Rightarrow (t) : y = x$

2.7.26
~~2.8.16~~ En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente égale à -3 ?

$f'(x) = 2x \Rightarrow$ pente $= -3 \Leftrightarrow f'(x) = -3$

$\Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

d'où $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

Donc $\boxed{P\left(-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{9}{4}\right)}$

2.7.27 ~~2.8.17~~ Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

est parallèle à la droite passant par $A(-3;2)$ et $B(1;14)$.

La droite (AB) : $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{14-2}{1-(-3)} = \dfrac{12}{4} = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$

La tangente au graphe de $f(x)$ est parallèle à la droite (AB)

$\Rightarrow f'(x) = 3$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 3 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow (3x+4)(x-2) = 0$

Donc $\boxed{x_1 = \dfrac{-4}{3} \quad ; \quad x_2 = 2}$

2.7.28 ~~2.8.18~~ En quels points la courbe $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+9}\right)' = \dfrac{1\,(x^2+9) - x\,(2x)}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-x^2+9}{(x^2+9)^2}$

tangente horizontale $\Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow \dfrac{-x^2+9}{(x^2+9)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+9 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$

* $x_1 = -3 \Rightarrow \boxed{P_1\left(-3 \,;\, -\dfrac{1}{6}\right)}$
* $x_2 = 3 \Rightarrow \boxed{P_2\left(3 \,;\, \dfrac{1}{6}\right)}$

2.7.29

~~2.8.10~~ Déterminer les abscisses en lesquelles les graphes des fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ admettent des tangentes parallèles dans $[0; 2\pi]$.

$f'(x) = -\sin(x)$

$g'(x) = \cos(x)$

"Tangentes parallèles" $\Leftrightarrow$ même pente

$\Rightarrow \quad g'(x) = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = -\sin(x)$

$\Rightarrow \quad \cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = -x_2 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Rightarrow \text{pas de solution} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

solution dans $[0; 2\pi]$: $k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

Donc : $\boxed{S = \left\{\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right\}}$

2.7.30

~~2.8.20~~ Déterminer la valeur à attribuer au nombre réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1 - mx}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$f(x) = (1 - mx)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(-m)(1-mx)^{-2/3}$

"Coupe l'axe Oy" $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = -\frac{m}{3}$

"parallèle à la droite $y = \frac{3}{2}x$" $\Rightarrow$ même pente

$\Rightarrow -\frac{m}{3} = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{m = -\frac{9}{2}}$

2.7.31 Déterminer les coefficients a, b, c et d sachant que la courbe $y = \dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+dx-2}$:

- admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale,
- n'admet pas d'asymptote horizontale,
- passe par le point $P(1;-2)$ et qu'en ce point la pente de la tangente vaut -5.

* pas d'AH $\Rightarrow$ $\underline{c = 0}$

* $x = 2$ comme AV $\Rightarrow$ $dx - 2 = x - 2 \iff \underline{d = 1}$

* passe par $P(1;-2)$

$$\Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow -2 = \frac{1+a+b}{-1} \qquad (1)$$

* pente $= -5$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{(2x+a)(x-2) - (x^2+ax+b)}{(x-2)^2}$

$$\Rightarrow f'(1) = -5 \Rightarrow \frac{-2a-b-3}{1} = -5 \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ on a le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1+a+b}{-1} = -2 \\ \dfrac{-2a-b-3}{1} = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ -2a-b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{a = 1 \Rightarrow b = 0}$$

Donc $\boxed{y = \dfrac{x^2+x}{x-2}}$

2.7.32 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = -2a + b + 3$

$f(-1) = a - b - 1$

$\Rightarrow (t) : y - (a-b-1) = (-2a+b+3)(x+1) \Rightarrow (t) : y = (-2a+b+3)x + (-a+2) = x+4$

par identification : $-a + 2 = 4 \Rightarrow \underline{a = -2} \Rightarrow b + 7 = 1 \Rightarrow \underline{b = -6}$

2.7.33 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x) = x^2$, $P(5;9)$

b) $f(x) = x^3$, $P(0;-2)$

a) $f(x) = x^2$, $P(5;9)$. Soit $T(a; f(a))$ le point de contact de la tangente issue de P

$\Rightarrow f(a) = a^2$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(a) = 2a$

$(t): y - a^2 = 2a(x-a)$

$P \in (t) \Rightarrow 9 - a^2 = 2a(5-a)$

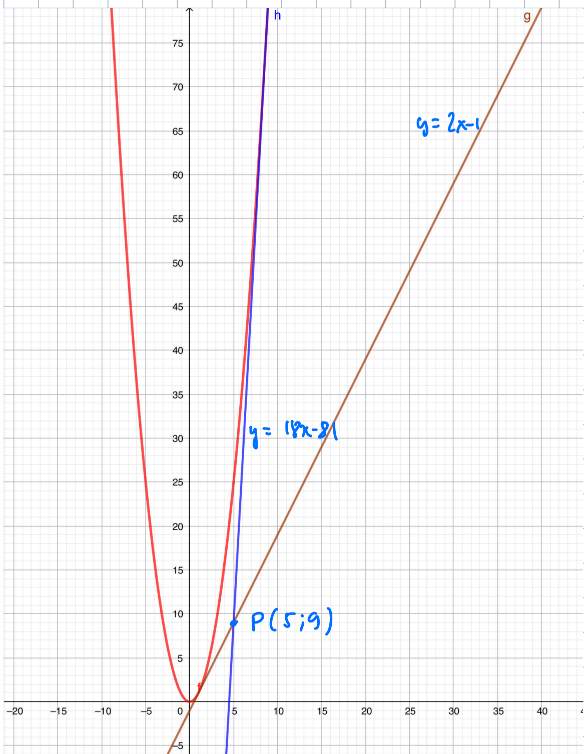
$\Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0$

$\Rightarrow (a-9)(a-1) = 0$

$\Rightarrow a_1 = 9$, $a_2 = 1$

$\Rightarrow (t_1): \boxed{y = 2x - 1}$

$(t_2): \boxed{y = 18x - 81}$



b) $f(x) = x^3$, $P(0;-2)$

On pose $T(a; f(a)) \Rightarrow f(a) = a^3$

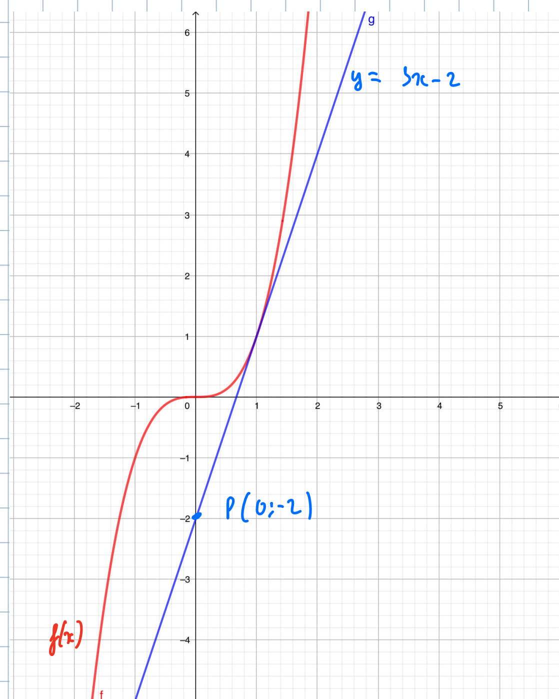
$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(a) = 3a^2$

$(t): y - a^3 = 3a^2(x-a)$

$P \in (t) \Rightarrow -2 - a^3 = 3a^2(-a)$

$\Rightarrow 2a^3 = 2 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

Donc $(t): \boxed{y = 3x - 2}$



2.7.34
~~2.8.24~~ Quels sont les points de la courbe $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

On pose $T(a\,;f(a)) \Rightarrow f(a) = a^3 + a^2$

$f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 2a$

$\Rightarrow (t) : y - (a^3 + a^2) = (3a^2 + 2a)(x - a)$

$O \in (t) \Rightarrow 0 - (a^3 + a^2) = (3a^2 + 2a)(-a)$

$\Rightarrow 2a^3 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2(2a+1) = 0 \Rightarrow \underbrace{a_1 = 0}_{f(a)=0}\,,\ \underbrace{a_2 = -\frac{1}{2}}_{f(a)=\frac{1}{8}}$

Donc $\boxed{T_1\,(0\,;0) \quad \text{et} \quad T_2\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{8}\right)}$

2.7.35
~~2.8.25~~ Calculer l'angle formé par les courbes en leurs points d'intersection :

a) $y = x^2$ et $y = x^3$,

b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ et l'axe Ox,

Réf c) $y = \sin(2x)$ et $y = \dfrac{1}{2}\tan(x)$, avec $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\tan(\varphi) = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

a) $y = x^2$ et $y = x^3$

intersection $\Rightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$

$\Rightarrow I_1\,(0\,;0)$ et $I_2\,(1\,;1)$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$

* $I_1(0\,;0) \Rightarrow f'(0) = 0 = m_1$ et $g'(0) = 0 = m_2$

$\Rightarrow \tan(\varphi_1) = \left|\dfrac{0-0}{1+0}\right| \Rightarrow \tan(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \underline{\varphi_1 = 0^\circ}$

* $I_2(1\,;1) \Rightarrow f'(1) = 2 = m_3$ et $g'(1) = 3 = m_4$

$\Rightarrow \tan(\varphi_2) = \left|\dfrac{2-3}{1+6}\right| = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \underline{\varphi_2 \simeq 8{,}13^\circ}$

b) $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$ et l'axe Ox

$\Rightarrow$ Intersection : $\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow I_1(-2;0)$ et $I(2;0)$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

* $I_1(-2;0)$

$\Rightarrow m_1 = f'(-2) = \frac{-20}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-20}{(5)^2} = \frac{-20}{25} = \frac{-4}{5}$

$m_2 = 0$ (axe Ox)

$\Rightarrow \tan(\varphi_1) = \left|\frac{-\frac{4}{5}-0}{1+0}\right| = +\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 \cong 38,66°}$

* $I_2(2;0)$

$\Rightarrow m_3 = f'(2) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$m_4 = 0$

$\Rightarrow \tan(\varphi_2) = \left|\frac{\frac{4}{5}-0}{1+0}\right| = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 \simeq 38,66°}$

c) $y = \sin(2x)$ et $y = \frac{1}{2}\tan(x)$

$\Rightarrow$ Intersection : $\sin(2x) = \frac{1}{2}\tan(x)$

$\Rightarrow 2\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\Rightarrow 4\sin(x)\cos^2(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow 4\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x) = 0$

$$\Rightarrow \sin(x)\left[4\cos^2(x) - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \pm \frac{1}{2}$$

* $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi \Rightarrow I_1(0;0)$, $k \in \mathbb{Z}$

* $\cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

* $\cos(x) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Solutions dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$: $I_1(0;0)$ et $I_2\left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

$y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* $f'(x) = 2\cos(2x)$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2(x)}$

$\Rightarrow$ avec $I_1(0;0) \Rightarrow m_1 = 2 = f'(0)$

$m_2 = \frac{1}{2} = g'(0)$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_1) = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 \approx 36,87^\circ}$$

$\Rightarrow$ avec $I_2\left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow m_3 = -1$

$m_4 = 2$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_2) = \left| \frac{-1 - 2}{1 + (-1)(+2)} \right| = 3 \Rightarrow \boxed{\varphi_2 \approx 71,57^\circ}$$

2.7.36 Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels les courbes $y = x^3 + ax^2 + bx$ et $y = x^2 - 6x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

" sont tangentes " $\Rightarrow$ intersection : $f(4) = g(4)$

$\Rightarrow 64 + 16a + 4b = 16 - 24 \Rightarrow 4a + b = -18 \quad (1)$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(4) = 48 + 8a + b$

$g'(x) = 2x - 6 \Rightarrow g'(4) = 8 - 6 = 2$

$\Rightarrow f'(4) = g'(4) \Leftrightarrow 48 + 8a + b = 2 \Rightarrow 8a + b = -46 \quad (2)$

Système :

$$- \begin{cases} 4a + b = -18 \\ 8a + b = -46 \end{cases}$$

$$-4a = 28 \Rightarrow a = -\frac{28}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -7 \\ b = 10 \end{array}}$$

et

2.7.37 Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que les courbes $y = \sqrt{x} + k$ et $y = \dfrac{x}{2} + 3$ soient tangentes. Calculer le point de tangence.

$f(x) = \sqrt{x} + k$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} + 3$

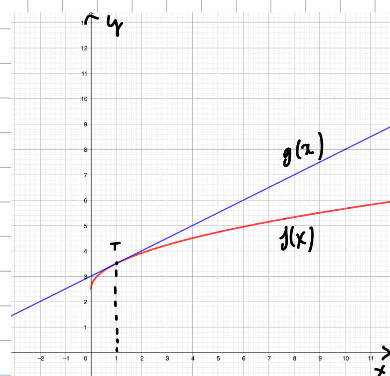
$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad g'(x) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = g'(x) \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

et $f(1) = g(1) \Rightarrow \sqrt{1} + k = \dfrac{1}{2} + 3$

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{5}{2}}$

et le point de tangence : $g(1) = \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{7}{2} \Rightarrow \boxed{T\left(1 ; \frac{7}{2}\right)}$



2.7.38 ~~2.7.28~~ Quelle valeur faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2} - ax^2$ se coupent à angle droit.

Rappel : Deux droites se coupent à angle droit si et seulement si le produit de leur pente $= -1$

* Intersection entre $f(x)$ et $g(x)$: $x^2 = \frac{1}{2} - ax^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 - 2ax^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2ax^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(2+2a) = 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2+2a}}$ avec $a > -1$

* $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -2ax$ ($f'(x)$ et $g'(x)$: fcts impaires)

$\Rightarrow m_1 = f'\left(\sqrt{\frac{1}{2+2a}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2+2a}} = \sqrt{\frac{4}{2(1+a)}} = \sqrt{\frac{2}{1+a}}$

$\Rightarrow m_2 = g'\left(\sqrt{\frac{1}{2+2a}}\right) = -2a\sqrt{\frac{1}{2+2a}} = -a\sqrt{\frac{4}{2(1+a)}}$

$= -a\sqrt{\frac{2}{1+a}}$

d'où $m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{1+a}} \cdot \left(-a\sqrt{\frac{2}{1+a}}\right) = -1$

$\Leftrightarrow -a \cdot \left(\frac{2}{1+a}\right) = -1 \Leftrightarrow -2a = -1(1+a)$

$\Leftrightarrow -2a = -1 - a \Leftrightarrow -2a + a = -1$

$\Leftrightarrow -a = -1 \Rightarrow \underline{a = 1}$