

Exponentielles et logarithmes

① Exponentielles :

* Définition 1

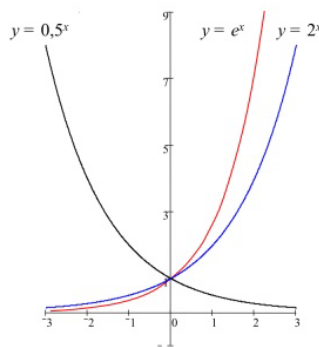
Soit a un nombre strictement positif, $a \neq 1$.

On appelle fonction exponentielle de base a , définie dans $\mathbb{R}$ et notée $\exp_a$, la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \exp_a : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & y = \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

* Remarque :

Il est important de bien faire la différence entre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances. Dans la fonction puissance $f(x) = x^2$, l'exposant est fixé et la base varie, alors que dans la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$, la base est fixée et l'exposant varie.



Fonctions exponentielles de base a

* proposition 1 :

La fonction exponentielle de base a donnée par $\exp_a(x) = a^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

Ainsi, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées pour tout nombre réels x_1 et x_2 :

- i) Si $x_1 \neq x_2$, alors $a^{x_1} \neq a^{x_2}$
- ii) Si $x_1 = x_2$, alors $a^{x_1} = a^{x_2}$

* Le nombre e (nombre d'Euler)

- Parmi toutes les bases possibles, une est particulièrement remarquable. Il s'agit du nombre noté :

$$e = 2.7182818...$$

- Ce nombre est un nombre irrationnel comme π .
- Lorsque l'on prend le nombre e comme base, on écrit simplement $\exp(x)$ ou e^x .
- La fonction $f(x) = e^x$ est strictement croissante car $e > 1$.

* Équation exponentielle "Simple"

On appelle équation exponentielle une équation dans laquelle l'inconnue apparaît en exposant.

Exemples :

$$2^x = 3$$

$$3^{x-1} = 6$$

* Théorème :

Soit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Exemples :

$$a) \quad 2^{x-1} = 2^3 \quad (\Leftrightarrow) \quad x-1 = 3 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad S = \{4\}$$

$$b) \quad 3^{2x+1} = 9 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3^{2x+1} = 3^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x+1 = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

⇒ principe de résolution :

Marche à suivre :

- i) Transformer l'équation en utilisant les propriétés des exponentielles pour obtenir une équation de la forme :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x .

- ii) "Éliminer" les bases a en utilisant l'injectivité de la fonction exponentielle (voir proposition 1) :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

- iii) Résoudre l'équation à une inconnue $f(x) = g(x)$.

! Attention :

Cette méthode de résolution permet uniquement de résoudre des équations exponentielles de même base (après éventuellement quelques transformations)

(2) Logarithmes :

* Définition 2.1

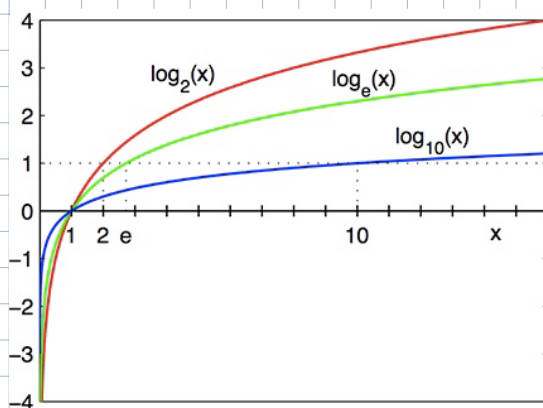
Soit a positif ($a \neq 1$) et $x \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle logarithme du nombre x en base a noté $\log_a(x)$, le nombre réel tel que :

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$

Cette relation signifie que le logarithme (en base a) de x est l'exposant auquel il faut élever a pour obtenir x .

* Remarque :

$\log_a(x)$ n'est défini que si $x > 0$



Fonctions logarithmes en base 2, e et 10

Exemples :

- $\log_2(8) = 3$, car $2^3 = 8$.
- $\log_5(-25)$ n'est pas défini, car l'équation $5^x = -25$

n'admet pas de solution.

• $\log_{-4}(16)$ n'est pas défini, car la base du logarithme doit être un nombre $a > 0$

* Définition 2.2 :

Soit $a > 0$ ($a \neq 1$). On appelle fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a .

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a(x) \end{aligned}$$

* Logarithmes particuliers :

a) Logarithme en base 10 (ou logarithme décimal)

Définition 2.3

Soit u un nombre réel strictement positif. On définit que l'unique solution de l'équation $10^x = u$ s'appelle le logarithme en base 10 du nombre u . On note cette solution par :

$$x = \log(u) \Leftrightarrow 10^x = u$$

Exemples :

$$\bullet 10^x = 3 \Leftrightarrow x = \log(3) \approx 0,477$$

$$\bullet \log(x) = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$$

! $\log(x)$ est l'inverse de 10^x

b) logarithme en base e (ou logarithme naturel)

Définition 2.4

Soit u un nombre réel strictement positif. On définit que l'unique solution de l'équation $e^x = u$ s'appelle le logarithme en base e du nombre u . On note cette solution par :

$$x = \ln(u) \Leftrightarrow e^x = u$$

Exemples :

$$e^x = 26 \Leftrightarrow x = \ln(26) \approx 3,258$$

$$\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} \approx 0,0498$$

! $\ln(x)$ est l'inverse de e^x

* Propriétés des logarithmes :

* Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

$$a) \log_a(a^x) = x$$

$$b) a^{\log_a(x)} = x$$

$$c) \log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$$

* Propriétés :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

Les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

a) $\log_a(1) = 0$

b) $\log_a(a) = 1$

c) Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

d) Le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes :

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

e) Le logarithme d'une puissance est le produit de l'exposant par le logarithme :

$$\log_a(x^q) = q \cdot \log_a(x)$$

f) Le logarithme d'un inverse est l'opposé du logarithme :

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$

* Pour résoudre les équations exponentielles, non seulement en base 10, mais dans une base quelconque, on s'appuie sur la formule suivante :

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

Exemple :

$$3^x = 21 \quad | \quad \log(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow \log(3^x) = \log(21)$$

$$\Leftrightarrow x \log(3) = \log(21)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(21)}{\log(3)} \approx 2,77$$

$$\text{ou : } 3^x = 21 \quad | \quad \ln(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(21)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(21)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(21)}{\ln(3)} \approx 2,77$$

* Formule du changement de base :

* Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{ou} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

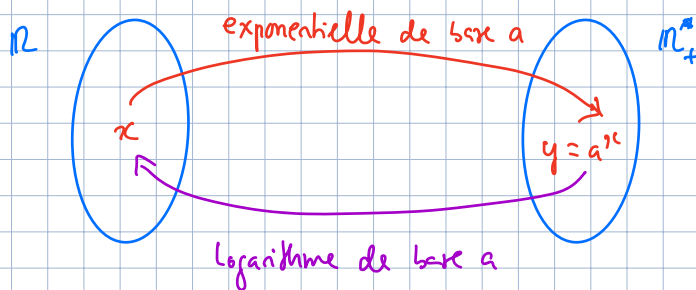
* Exemple :

Calculer $\log_7(21)$

Question : $\log_a(x)$ où $a > 0$ ($a \neq 1$)

pourquoi $a \neq 1$?

* Logarithme = l'op. réciproque de la fonction exponentielle de base a .



* Équations logarithmiques :

Une équation logarithmique à une inconnue et une équation où l'inconnue figure dans un ou plusieurs logarithmes de même base ou de bases différentes.

=> Exemples :

$$i) \ln(x+6) - \ln(10) = \ln(x-1) - \ln(2)$$

$$ii) \log_u(5+x) = 3$$

$$iii) \log_9(x) = \frac{1}{8} \log_3(x^2+2)$$

=> Principe de résolution :

Marche à suivre pour résoudre une équation logarithmique :

- i) Transformer l'équation en utilisant les propriétés des logarithmes pour obtenir une équation de la forme :

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x ,

- ii) "Éliminer" les $\log_a$ en utilisant l'injectivité de la fonction logarithmique :

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

- iii) Résoudre l'équation à une inconnue $f(x) = g(x)$

- iv) Vérifier les solutions obtenues dans l'équation de départ !

* Remarques :

i) Attention ! Le fait d'éliminer les logarithmes par l'injectivité peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

ii) $f(x) = g(x) \not\Rightarrow \log_a(f(x)) = \log_b(g(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $f(x)$ et $g(x)$ pourraient être nuls pour des x particuliers.

* Équations exponentielles

On donne ci-dessous une méthode, s'appuyant sur les logarithmes, pour résoudre des équations où il est impossible d'obtenir des puissances de même base (méthode de résolution plus générale).

=> Principe de résolution :

Marche à suivre pour résoudre une équation exponentielle :

i) Transformer l'équation en utilisant les propriétés des exponentielles pour obtenir une équation de la forme :

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x ,

ii) "Éliminer" les puissances en utilisant les logarithmes.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log(a^{f(x)}) = \log(b^{g(x)})$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot \log(a) = g(x) \cdot \log(b)$$

iii) Résoudre l'équation à une inconnue $f(x) \cdot \log(a) = g(x) \cdot \log(b)$