Exercices - SUITES

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

a) On pose (P_n) : " $u_n > 0$ "

* Initialisation : $P(0)$ est vraie pour $n = 0$

En effet $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie, c-à-d $u_n > 0$

Or : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$ est un quotient de deux réels strictement positifs $\Rightarrow$ u_{n+1} est aussi strictement positif

$\Rightarrow$ $u_{n+1} > 0$ $\Rightarrow$ $P(n+1) > 0$ (est vraie)

* Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b) $P(n)$: strictement décroissante

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \text{or} \quad u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

En effet : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2u_n}{2+u_n}}{u_n} = \dfrac{2\cancel{u_n}}{2+u_n} \cdot \dfrac{1}{\cancel{u_n}} = \dfrac{2}{2+u_n}$

puisque $u_n > 0$, il en vient que $2 + u_n > 2$

Donc $\dfrac{2}{2+u_n} < 1$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc $u_{n+1} < u_n$

=> la suite (u_n) est strictement décroissante

2) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = -3n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de n.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

a) $U_n = -3n + 4 \Rightarrow U_{n+1} = -3(n+1) + 4 = -3n - 3 + 4$

$\Rightarrow \boxed{U_{n+1} = -3n + 1}$

b) On a : $U_n = -3n + 4 \Rightarrow n = \dfrac{4 - U_n}{3}$

donc $U_{n+1} = -3\left(\dfrac{4-U_n}{3}\right) + 1 = -(4 - U_n) + 1 = U_n - 3$

$\Rightarrow \boxed{U_{n+1} = U_n - 3}$

3) La suite (U_n) définie par $U_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

Rappel :

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$U_{n+1} = U_n + r \qquad (r \text{ est appelé raison de la suite})$$

$$U_{n+1} = U_n + r \Rightarrow r = U_{n+1} - U_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n$$

$$\Rightarrow r = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$$

$\Rightarrow$ La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9

$\Rightarrow$ (U_n) est une suite arithmétique de raison -9

4) La suite (U_n) définie par : $U_n = 3 \cdot 5^n$ est-elle géométrique ?

Rappel :

Une suite (U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$U_{n+1} = q \cdot U_n \qquad (q \text{ est appelé raison de la suite})$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3 \cdot 5^{n+1}}{3 \cdot 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$$

$\Rightarrow$ Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

$\Rightarrow$ (U_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme

$U_0 = 3 \cdot 5^0 = 3$

5) Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$U_n = \frac{-2n - 3}{n + 8}$$ et $\varepsilon = 0{,}01$. Si on accepte que la suite converge vers $L = -2$, trouver le plus petit entier positif N tel que $|U_n - L| < \varepsilon$, pour tout $n > N$

On sait que $U_n = \frac{-2n-3}{n+8}$ $\Rightarrow$ Déterminer $N = N(\varepsilon)$ tq $\left|\frac{-2n-3}{n+8} - (-2)\right| < 0{,}01$

$$\Rightarrow \left|\frac{-2n-3}{n+8} + 2\right| = \left|\frac{-2n-3 + 2(n+8)}{n+8}\right| = \left|\frac{-2n-3+2n+16}{n+8}\right|$$

$$= \left|\frac{13}{n+8}\right| = \frac{13}{n+8}$$

on veut que $\frac{13}{n+8} < 0{,}01 \Leftrightarrow 13 < 0{,}01(n+8)$

$$\Rightarrow 1300 < n+8 \Rightarrow n > 1292$$

Si $N = 1292$, alors $\forall n > 1292$ $|U_n + 2| < 0{,}01$

Test: $|U_{1292} + 2| = \left|\frac{-2 \cdot 1292 - 3}{1292+8} + 2\right| = \left|\frac{-2589}{1301} + 2\right| \simeq 0{,}00999 < 0{,}01$

$$\boxed{\text{Donc } N = 1292}$$

6) Démontrer, en utilisant la définition que la suite (U_n) définie par

$$U_n = \frac{5n+6}{3n-1}, \text{ pour } n \geqslant 1, \text{ converge vers } \frac{5}{3}$$

Soit $\varepsilon > 0$, déterminer $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, on a

$$\left| U_n - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5n+6}{3n-1} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3(5n+6) - 5(3n-1)}{3(3n-1)} \right| = \left| \frac{15n+18-15n+5}{3(3n-1)} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{23}{3(3n-1)} < \varepsilon \iff 23 < 3(3n-1)\varepsilon$$

$$3(3n-1) > 0$$

$$\iff 23 < (9n-3)\varepsilon \iff \frac{23}{\varepsilon} + 3 < 9n$$

$$\Rightarrow n > \frac{23}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \Rightarrow n > \frac{23+3\varepsilon}{9\varepsilon}$$

Donc si $N = \left[\frac{3\varepsilon + 23}{9\varepsilon} \right]$, $\forall n > N$, on a :

$$\left| U_n - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon$$

Donc $(U_n)_n$ converge vers $\frac{5}{3}$

7) On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{n+1}{3n+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Donner, s'ils existent, le minimum, le maximum, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble E.

- si $n = 0 \Rightarrow \frac{0+1}{3\cdot 0+2} = \frac{1}{2}$

  $n = 1 \Rightarrow \frac{1+1}{3\cdot 1+2} = \frac{2}{5}$

  ...

$\Rightarrow E = \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{2}{5} ; \frac{3}{8} ; \frac{4}{11} ; \dots \right\}$

Alors minimum : n'existe pas

maximum : $\frac{1}{2}$

Ensemble des majorants : $\left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[$

Ensemble des minorants : $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right]$

Tous les termes de l'ensemble E sont supérieurs à la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

Borne supérieure : $\frac{1}{2}$

Borne inférieure : $\frac{1}{3}$

8) Soit (U_n) la suite définie par : $U_2 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 1}{U_n + 3}$

pour tout $n \geq 2$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$U_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}.$$

* On note (P_n) l'égalité à démontrer : $U_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$

i) Initialisation : pour $n = 2$ $\Rightarrow$ $P(2)$ est vraie ?

On a : $U_2 = 3$

et $U_2 = \dfrac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \dfrac{4+2}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$

donc $P(2)$ est vraie

ii) Hérédité :

Soit un entier $n \geq 2$, on suppose que (P_n) est vraie, c-à-d

$U_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$, on va montrer que (P_{n+1}) est aussi vraie, c-à-d

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$$

En effet, on a :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 1}{U_n + 3} = \frac{3\left(\frac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 1}{\left(\frac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 3}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{\dfrac{3(2^n+2)+2^n-2}{\cancel{2^n-2}}}{\dfrac{2^n+2+3(2^n-2)}{\cancel{2^n-2}}} = \frac{3(2^n+2)+2^n-2}{2^n+2+3\cdot 2^n-6}$$

$$= \frac{3\cdot 2^n+6+2^n-2}{2^n+2+3\cdot 2^n-6} = \frac{4\cdot 2^n+4}{4\cdot 2^n-4}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{2\cdot 2\cdot 2^n+4}{2\cdot 2\cdot 2^n-4} = \frac{2\cdot 2^{n+1}+4}{2\cdot 2^{n+1}-4} = \frac{\cancel{2}(2^{n+1}+2)}{\cancel{2}(2^{n+1}-2)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}-2}$$ $\Rightarrow$ donc (P_{n+1}) est vraie donc (P_n) est héréditaire

iii) <u>Conclusion :</u>

D'après le principe de raisonnement par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \geq 2$

9) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par $U_n = \dfrac{-2n+3}{n+1}$ est décroissante.

(U_n) est décroissante si $U_n - U_{n+1} \geq 0$

Or $$U_n - U_{n+1} = \frac{-2n+3}{n+1} - \frac{-2(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{-2n+3}{n+1} - \frac{-2n-2+3}{n+2}$$

$$= \frac{-2n+3}{n+1} - \frac{-2n+1}{n+2} = \frac{(-2n+3)(n+2) - (n+1)(-2n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{-2n^2} \cancel{-n} + 6 \cancel{+2n^2} \cancel{+n} - 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{\underbrace{(n+1)}_{>0}\underbrace{(n+2)}_{>0}} \geq 0$$

donc $U_n \geq U_{n+1}$

$\Rightarrow$ (U_n) est décroissante.

10) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par $U_n = \dfrac{n}{2n+1}$ est bornée.

$\Rightarrow$ Il faut montrer que $(U_n) \leq \frac{1}{2}$ pour tout n

En effet, $\dfrac{n}{2n+1} \leqslant \dfrac{n+\frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{\cancel{n+\frac{1}{2}}}{2\cancel{\left(n+\frac{1}{2}\right)}} = \dfrac{1}{2}$

Donc $U_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout n

Comme $U_n = \dfrac{n}{2n+1} \geqslant 0$ pour tout n

$\Rightarrow$ on a : $0 \leq |U_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout n