Asymptotes et limites

1) Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x - 3} - 2x + 6$$

a) Déterminer ED_f.

b) Déterminer le signe de $f(x)$.

c) Déterminer toutes les asymptotes de la courbe $y = f(x)$

2) Rechercher toutes les asymptotes à la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \frac{-2x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2}$$

3) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x^3 + 7x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x}$$

Déterminer la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à son asymptote oblique.

4) $$\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{2x}{x^2+1} \right) \right)$$

1) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x - 3} - 2x + 6$

a) <u>condition :</u> $4x^2 + 4x - 3 \geq 0 \iff (2x+3)(2x-1) \geq 0$

		$-3/2$		$1/2$		
signe de $4x^2+4x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow \boxed{ED = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[}$

b) <u>Signe de $f(x)$:</u>

* zéro de $f(x)$: $\sqrt{4x^2 + 4x - 3} - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{4x^2 + 4x - 3} = \underbrace{2x - 6}\ \Big|^{2}$

condition $2x - 6 \geq 0$
$x \geq 3$

$\left(\sqrt{4x^2 + 4x - 3}\right)^2 = (2x-6)^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 24x + 36$

$\Rightarrow x = \frac{39}{28}$ ne convient pas

$\Rightarrow f(x)$ n'a pas de zéro

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$				$+$	

c) * <u>AV</u> : aucune

* <u>À gauche :</u>

• m : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x - 3} - 2x + 6}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{4x^2}\right)} - 2x\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{4x^2}} - 2x\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2\cancel{x}\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{4x^2}}_{\to 0}} + 1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}}$

$$\Rightarrow m = \lim_{x\to-\infty} -2\left(1+1\right) = -4$$

$$\bullet\ h = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x-3} - 2x+6 + 4x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x-3} + 2x+6\right)$$

$$\overset{-\infty+\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+4x-3}+2x+6\right)\left(\sqrt{4x^2+4x-3}-(2x+6)\right)}{\sqrt{4x^2+4x-3}-(2x+6)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4x-6-(2x+6)^2}{-2x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} - 2x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4x-6-4x^2-24x-36}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-20x-39}{-2x\left(\sqrt{1+\dots}+1+\dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(20+\frac{39}{x}\right)}{-2x\left(\sqrt{1+\dots}+1+\dots\right)} = \frac{20}{2(1+1)} = \frac{20}{4} = 5$$

$\Rightarrow$ À gauche il y a une AO : $\boxed{y = -4x+5}$

* <u>À droite</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x-3} - 2x+6\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+4x-3}-(2x-6)\right)\left(\sqrt{4x^2+4x-3}+(2x-6)\right)}{\sqrt{4x^2+4x-3}+2x-6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4x-3-4x^2+24x-36}{\sqrt{4x^2+4x-3}+2x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{28x-39}{2x\left(\sqrt{1+\dots}+2x(1-\dots)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(28-\frac{39}{x}\right)}{2x\left(\sqrt{1+\dots}+1-\dots\right)} = \frac{28}{2\cdot 2} = 7$$

$\Rightarrow$ À droite il y a une $\boxed{\text{AH} : y = 7}$

2) $\quad f(x) = \dfrac{-2x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{-2x^3 - x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x-1)}$

$\Rightarrow \; ED = \mathbb{R} \setminus \{-2 \, ; 1\}$

* <u>AV</u> :

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2x^3 - x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x-1)} \;\text{“}\dfrac{3}{0}\text{''} = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{AV : x = -2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x^3 - x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x-1)} \;\text{“}\dfrac{3}{0}\text{''} = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{AV : x = 1}$

* <u>AO</u> :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & -2x^3 & -x^2 & +5x & +1 & x^2 + x - 2 \\
\cline{6-6}
- & -2x^3 & -2x^2 & +4x & & -2x + 1 \\
\cline{1-5}
 & 0 & x^2 & +x & +1 & \\
 & - & x^2 & +x & -2 & \\
\cline{3-5}
 & & & & +3 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad \boxed{AO : y = -2x + 1}$

3/ $f(x) = \dfrac{3x^3+7x^2+3x-2}{x^2+2x}$

on cherche AO :

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +7x^2 & +3x & -2 & x^2+2x \\ \hline -\ 3x^3 & +6x^2 & & & \underbrace{3x+1}_{\Downarrow\ \text{AO}} \\ \hline & x^2 & +3x & & \\ & -\ x^2 & +2x & & \\ \hline & & x & -2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = 3x+1 + \dfrac{x-2}{x^2+2x}$

d'où $\delta(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2x} = \dfrac{x-2}{x(x+2)}$

$ED_{\delta(x)} = \mathbb{R}^* \setminus \{-2\}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$\delta(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	
position		au dessous	‖	au dessus	‖	au dessous	0	au dessus	

intersection

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{2x}{x^2+1} \right) \right)$

On pose $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

Quand $x \to \infty$ alors $t \to 0$

Donc $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{t} \cdot \sin\left(\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2}+1} \right) \right) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\sin\left(\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1+t^2}{t^2}} \right)}{t}$

$= \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\sin\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)}{t} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{2}{t^2+1} \frac{\sin\left(\frac{2t}{t^2+1} \right)}{\frac{2t}{t^2+1}}$

$= \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{2}{t^2+1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\sin\left(\frac{2t}{t^2+1} \right)}{\frac{2t}{t^2+1}}}_{\to 1} = 2 \cdot 1 = 2$

De même, lorsque $x \to +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{2x}{x^2+1} \right) \right) = 2}$