# Suites de nombres réels

## Corrigé

**2.4.4** Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

d) $d_n = \frac{n}{n^2+10}$, avec $n \geq 3$

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

f) $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ , avec $n \geqslant 1$

$\Rightarrow a_n = \left( 1, \frac{7}{4}, \frac{17}{9}, \frac{31}{16}, \dots \right)$

On a : $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 2 - \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow$ $a_n$ est bornée par 1 et 2

- minorée : $1 \leq a_n$ $\quad [1 ; +\infty[$
- majorée : $a_n < 2$ $\quad ]-\infty ; 2[$
- croissante : $a_{n+1} - a_n$ , $n \geqslant 1$

$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$

$\Rightarrow$ $a_n$ strictement croissante

b) $b_n = -n!$ avec $n \geqslant 1$

$\Rightarrow b_n = (-1, -2, -6, \dots)$

$\Rightarrow -n! \leqslant -1 \Rightarrow$ majorée par $-1$

On a : $-n! > -(n+1)!$ $\Rightarrow b_n$ strictement décroissante.

c) $c_n = 2n^2 - 7n$ avec $n \geqslant 2$

$\Rightarrow c_n = (-6, -3, 4, \dots)$

$\Rightarrow -6 \leqslant 2n^2 - 7n \Rightarrow c_n$ minorée par $-6$

* $c_{n+1} - c_n = 2(n+1)^2 - 7(n+1) - 2n^2 + 7n$

$= 2(n^2 + 2n + 1) - 7n - 7 - 2n^2 + 7n = \cancel{2n^2} + 4n + 2 - \cancel{7n} - 7 - \cancel{2n^2} + \cancel{7n}$

$= 4n - 5 > 0$ si $n \geqslant 2$

$\Rightarrow c_n$ strictement croissante

d) $d_n = \dfrac{n}{n^2 + 10}$, avec $n \geqslant 3$

$\Rightarrow d_n = \left( \dfrac{3}{19}, \dfrac{2}{13}, \dfrac{1}{7}, \dots \right)$

$0 < \dfrac{n}{n^2 + 10} \leqslant \dfrac{3}{19} \Rightarrow$ $d_n$ minorée par $0$

$d_n$ bornée par $0$ et $\dfrac{3}{19}$

$d_{n+1} - d_n = \dfrac{n+1}{(n+1)^2 + 10} - \dfrac{n}{n^2 + 10} = \dfrac{(n+1)(n^2+10) - n((n+1)^2 + 10)}{(n^2+10)((n+1)^2+10)}$

$= \dfrac{(n^3 + n^2 + 10n + 10) - (n^3 + 2n^2 + 11n)}{((n+1)^2 + 10)(n^2 + 10)}$

$$= \frac{-n^2 - n + 10}{((n+1)^2+10)(n^2+10)}$$

- Étude le signe de $-n^2 - n + 10$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)\cdot 10 = 41$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{-2} \simeq 2{,}7 < 3$$

$$n_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{-\sqrt{2}} < 0$$

- tableau de signe :

| $n$ | $-\infty$ | | $n_2$ | | $n_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-n^2-n+10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

d'où $$d_{n+1} - d_n = \frac{-n^2 - n + 10}{((n+1)^2+10)(n^2+10)} < 0 \quad \forall n \geq 3$$

$\Rightarrow$ <u>$d_n$ est strictement décroissante</u>

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

$\Rightarrow e_n = (1, 9, 1, \ldots)$

$\Rightarrow 1 \leq 3^{1+(-1)^n} \leq 9 \Rightarrow$ <u>$e_n$ bornée par 1 et 9</u>

f) $$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n = (1, 3, 7, \ldots)$

$\Rightarrow 1 \leq f_n \Rightarrow$ <u>$f_n$ minorée par 1</u>

$f_{n+1} - f_n = 1 + 2f_n - f_n = 1 + f_n > 0 \Rightarrow$ <u>$f_n$ strictement croissante</u>

**2.4.5** Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et $\epsilon > 0$. Si on accepte que la suite converge vers $L$, trouver le plus petit entier positif $N$ tel que $\mid u_n - L \mid < \epsilon$, pour tout $n > N$.

a) $u_n = \dfrac{3}{n-2}$, avec $L = 0$ et $\epsilon = 0,1$  b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, avec $L = 1$ et $\epsilon = 0,25$

En considérant $\epsilon$ quelconque, démontrer que les suites ci-dessus sont convergentes.

a) À partir de quel $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|U_n - L| < \varepsilon \quad \text{avec} \quad L = 0,\ \varepsilon = 0,1$$

$$\iff |U_n - 0| < 0,1 \quad \text{pour} \quad n > N$$

$$\left|\frac{3}{n-2} - 0\right| \underset{n-2>0}{=} \frac{3}{n-2} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{3}{n-2} < 0,1 \iff 30 < n-2 \Rightarrow n > 32$$

$\Rightarrow N = 32 \to$ Alors $|U_n - L| < \varepsilon$

si $|U_{32} - L| < \varepsilon \Rightarrow$ alors $\left|\frac{3}{32-2}\right| < 0,1$ non  Donc $N = 33$

* $(U_n)$ converge vers $L$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ ($N$ dépend de $\varepsilon$)

tel que $|U_n - L| < \varepsilon$, $n > N$

$\Rightarrow$ on a : $\left|\frac{3}{n-2} - 0\right| < \varepsilon$

$n > 2 \iff \frac{3}{n-2} < \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} < n-2$

$$\iff n > \frac{3}{\varepsilon} + 2$$

$$\iff n > \frac{3 + 2\varepsilon}{\varepsilon}$$

On choisit $N = E\left(\frac{3+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$  ou $N = E\left(\frac{3+2\varepsilon}{\varepsilon} + 1\right) = E\left(3\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$

$\Rightarrow \forall n \geq N \Rightarrow |U_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow L = 0$

$\Rightarrow \forall n > N = E\left(\frac{3+2\varepsilon}{\varepsilon}\right),\ |U_n - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0$

b) $U_n = \frac{n}{n+1}$, $L = 1$, $\varepsilon = 0{,}25$

$\varepsilon = 0{,}25 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}25$

$\Leftrightarrow \left|\frac{n - n - 1}{n+1}\right| < 0{,}25$

$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n+1}\right| < 0{,}25$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4 < n+1 \Rightarrow n > 3$

On pose $N = 4$

* $|U_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 < (n+1)\varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

posr $N = E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$

ou $N = E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1\right) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

dans ce cas : $\forall n \geq N$

$\Rightarrow |U_n - 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow L = 1$

$\Rightarrow \forall n > E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right),\ |U_n - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = L$

**2.4.6** Calculer :

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n-1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{1-n^2}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^3}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2n(-1)^n}{n}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,4}{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0}} = \frac{4}{2} = \underline{2}$

$\Rightarrow$ $(U_n)$ converge vers $L$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ ($N$ dépend de $\varepsilon$)

tel que $|U_n - L| < \varepsilon$, $n > N$

$\Rightarrow \left|\frac{4n}{2n-1} - 2\right| = \left|\frac{2}{2n-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{2n-1} < \varepsilon \Rightarrow 2n-1 > \frac{2}{\varepsilon}$

$\Rightarrow 2n > \frac{2}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \Rightarrow N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \underbrace{+1}_{\downarrow}\right)$

$n > N$

$\Rightarrow N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \forall n \geq N$, on a $|U_n - 2| < 2$

$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} U_n = \underline{2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\,2}{\cancel{n^2}(-1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 1} = \frac{2}{-1} = \underline{-2}$

$\left|\frac{2n^2}{1-n^2} + 2\right| = \left|\frac{2n^2 + 2(1-n^2)}{1-n^2}\right| = \left|\frac{2}{1-n^2}\right| = \left|-\frac{2}{(n^2-1)}\right|$

$= \frac{2}{n^2-1} < \varepsilon \Rightarrow 2 < \varepsilon(n^2-1) \Rightarrow n^2 - 1 > \frac{2}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}+1} \Rightarrow N = E\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}+1} + 1\right)$

$\Rightarrow \forall n \geq N$ on a $|U_n - (-2)| < \varepsilon \Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} U_n = \underline{-2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^3} \overset{\text{"}\frac{5}{\infty}\text{"}}{=} \underline{0}$

$$\left|\frac{5}{n^3} - 0\right| = \frac{5}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow n^3 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt[3]{\frac{5}{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow N = E\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\varepsilon}} + 1\right) \Rightarrow \forall n \geq N \quad |U_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} U_n = \underline{0}$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n + 2n(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(3 + 2(-1)^n\right)}{\cancel{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + 2(-1)^n\right)$

$= \begin{cases} 5 & n \text{ pair} \\ 1 & n \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow$ suite non convergente $\Rightarrow$ <u>pas de limite</u>

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left((2n-1)^2\right)^2}{(1-n^2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n^2-4n+1)^2}{n^4-2n^2+1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{16n^4 + 16n^2 + 1 - 32n^3 + 8n^2 - 8n}{n^4 - 2n^2 + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(16 + \overbrace{\frac{16}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{32}{n} + \frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^4}\left(1 \underbrace{- \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}_{\to 0}\right)} = \underline{16}$$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\, 7}{\sqrt{n^4\left(1-\frac{5}{n^4}\right)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\, 7}{\cancel{n^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{5}{n^4}}_{\to 0}}} = \frac{7}{1} = \underline{7}$

**2.4.7** A l'aide du théorème des deux gendarmes, calculer :

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}E(nx)$ , avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0}$

* Considérons les suites $a_n = \frac{k}{n^2}$, $k \in \mathbb{R}$, toutes ces suites convergent vers $0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

On a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

On a : $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$

$\Leftrightarrow -n \leq n\sin(n!) \leq n$

$\Leftrightarrow \dfrac{-n}{n^2+1} \leq \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} +\dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\,\frac{1}{n}}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})} = \dfrac{0}{1} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 0}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

On a : $0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{\cancel{n}(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{\cancel{n}\cdot n\cdot n\cdot \cdots\cdots n} = \dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}$

$= \dfrac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n} < \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Si "t est petit", on a $\sin(t) = t$

$\Rightarrow 0 \leq \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \leq \dfrac{1}{n^2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \leq n\cdot\dfrac{1}{n^2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \leq \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(nx)$ , avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

On a : $nx - 1 \leq E(nx) \leq nx$

$\Leftrightarrow \frac{nx-1}{n} \leq \frac{1}{n} E(nx) \leq \frac{nx}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{nx-1}{n} \leq \frac{1}{n} E(nx) \leq x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(x - \frac{1}{n})}{\cancel{n}} = x = \lim_{n\to\infty} x$$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(nx) = x}$

**2.4.8** Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 2.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $U_1 = \sqrt{2}$ , $U_2 = \sqrt{2U_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ , $U_3 = \sqrt{2U_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ , ...

* $(U_n)$ est croissante $\Rightarrow$ il faut démontrer que :

$$U_{n+1} - U_n \geq 0$$

Par récurrence :

$(P_n)$ : $U_n$ est croissante $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} - U_n \geq 0$ , $\forall n \geq 1$

i) La relation est vraie pour $n = 1$

$$U_2 - U_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\underbrace{\sqrt{\sqrt{2}} - 1}_{>0}) > 0 \text{ OK}$$

ii) Supposons que la relation est vraie pour $n$

iii) $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n} - \sqrt{2U_{n-1}} = \sqrt{2}\sqrt{U_n} - \sqrt{2}\sqrt{U_{n-1}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\underbrace{\sqrt{U_n} - \sqrt{U_{n-1}}}_{\geq 0}\right) \geq 0$$

$(U_n \geq U_{n-1} \Rightarrow \sqrt{U_n} \geq \sqrt{U_{n-1}})$

$\Rightarrow P_{n+1}$ est vraie

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

* $(U_n)$ est bornée $\forall n \geq 1 \quad U_n \leq 2$

par récurrence :

i) $(P_1)$ : $U_1 = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$ relation est vraie pour $n = 1$

ii) Supposons que la relation est vraie pour $n$

iii) $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$ : $U_n \leq 2 \Rightarrow U_{n+1} \leq 2$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2U_n} = \sqrt{2}\underbrace{\sqrt{U_n}}_{\leq 2} \leq \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

Donc $P_{n+1}$ est vraie

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ majorée par 2

$\Rightarrow$ la suite $(U_n)$ est bornée et croissante $\Rightarrow$ donc $(U_n)$ est convergente

b) $(U_n)$ est convergente $\Rightarrow$ calculer sa limite

$$U_n = \sqrt{2U_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2U_{n-1}} \qquad (*)$$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} U_n = \ell$

$(*) \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2U_{n-1}} = \sqrt{2}\ \underbrace{\sqrt{\lim_{n\to\infty} U_{n-1}}}_{\sqrt{\ell}}$

$\Rightarrow \quad \ell = \sqrt{2}\sqrt{\ell} \quad |(\ )^2$

$\Leftrightarrow \quad \ell^2 = 2\ell \quad \Rightarrow \quad \ell^2 - 2\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell(\ell-2) = 0$

$\Rightarrow \quad \ell = 0$ : impossible

ou $\quad \ell = 2 \quad \Rightarrow$ Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n = 2}$

**2.4.9** Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$, si $n \geq 1$ .

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $P(n)$ : $u_n > 0$

* $U_1 = 2 > 0 \Rightarrow P(1)$ est vraie

* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$

* $\Rightarrow U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} > \dfrac{0}{\underbrace{U_n + 1}_{\neq 0}} = 0$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ minorée par 0

* Strictement décroissante : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{U_n + 1} - U_n = \dfrac{U_n - U_n^2 - U_n}{U_n + 1}$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = -\dfrac{U_n^2}{U_n + 1} < 0 \Rightarrow (U_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante

b) $(U_n)_{n \geq 1}$ : suite strictement décroissante et minorée $\Rightarrow (U_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente.

Posons $L$ = limite de $(U_n)_{n \geq 1}$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{L}{L+1} \Rightarrow L^2 + L = L \therefore L^2 = 0 \Rightarrow L = 0$$

$$\left( U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = 0}$$

**2.4.10** Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $u_n < 4$, pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $P(n)$ $\overset{?}{<} 4$

par récurrence :

* $U_1 = 1 < 4 \Rightarrow P(1)$ est vraie

* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$

* $U_n < 4 \Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{12 + U_n} < \sqrt{12+4} = 4$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 4

b) On a :

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\sqrt{12 + U_n}\right)^2 - U_n^2 = 12 + U_n - U_n^2$$

$$= \underbrace{(4 - U_n)}_{>0}\underbrace{(U_n + 3)}_{>0} > 0$$

conséquence de

$\Rightarrow U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0 \Rightarrow U_{n+1}^2 > U_n^2 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$ car $(U_n)_{n\geq 1} > 0$

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) $(U_n)_{n \geq 1}$ suite croissante et majorée $\Rightarrow$ suite convergente

Posons $L =$ limite de $U_n$

$\Rightarrow$ $L = \sqrt{L+12}$ $\Rightarrow$ $L^2 = L + 12$ $\Rightarrow$ $L^2 - L - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $(L-4)(L+3) = 0$

Comme $(U_n)_{n \geq 1} > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 4}$

**2.4.12** Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 12}{4}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) On pose $v_n = a_n - 4$. Démontrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique.

b) Donner le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, puis calculer sa limite.

a) On a : $v_n = a_n - 4 \Rightarrow v_{n+1} = a_{n+1} - 4$

$\Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{a_n + 12}{4} - 4 = \dfrac{a_n + 12 - 16}{4} = \dfrac{a_n - 4}{4}$ $\rightarrow v_n$

$\Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{4} v_n$ où $v_1 = a_1 - 4 = 3 - 4 = -1$

$\Rightarrow$ $\boxed{(v_n)_{n\geq 1} \text{ est une suite géométrique de premier terme } -1 \text{ et de raison } \frac{1}{4}}$

b) Rappel : Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow U_{n+1} = q\,U_n$

et $\boxed{U_n = U_1 \cdot q^{n-1}}$

On a : $v_n = (-1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = v_n + 4 = (-1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 4$, $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 4, \quad n \geq 1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(4)^{n-1}} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = (-1)\cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4}$

## Exercice supplémentaire :

Les suites proposées, définie pour tout $n \geq 1$ sont-elles arithmétiques ? Si oui, préciser le $1^{er}$ terme et la raison. Sinon, justifier.

a) $U_n = 5n - 2$

b) $U_n = n^2 + n$

c) $U_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

d) $U_n = \dfrac{3n+1}{2}$

a) $U_n = 5n - 2$

$\Rightarrow U_1 = 3$, $U_2 = 8$, $U_3 = 13$, $U_4 = 18$

$\Rightarrow U_4 - U_3 = U_3 - U_2 = U_2 - U_1 = 5 \Rightarrow r = 5$

donc $U_n$ est une suite arithmétique avec $U_1 = 3$ et $r = 5$

Ou : $r = U_{n+1} - U_n = 5(n+1) - 2 - (5n-2) = 5(n+1) - 2 - 5n + 2$

$= 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5$ $\Rightarrow$ OK car $r$ constant.

b) $U_n = n^2 + n$

$\Rightarrow U_1 = 2$, $U_2 = 6$, $U_3 = 12$

$U_3 - U_2 = 6 \neq U_2 - U_1 = 4 \Rightarrow$ ce n'est pas une suite arithmétique

Ou : $r = U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n$

$= 2n + 2 \Rightarrow r$ varie en fct de $n \Rightarrow$ pas OK