Dérivées

1) Exercice 1 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (4x^3 - x^2 + 5x - 1)^4$

b) $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(2x+7)^4}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x-4}}{(3x+8)^3}$

d) $f(x) = (4x+6)^4 (2x-5)^3$

e) $f(x) = \sin^4\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x-5}{\sqrt{x}}\right)^3$

g) $f(x) = \sin(\cos(\pi(x))$

h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

2) Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$

a) Déterminer ED_f

b) Déterminer $f'(x)$ ainsi que $ED_{f'}$

c) Trouver l'équation de la tangente à cette courbe parallèle à la droite $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

3) Exercice 3 :

Trouver la pente de la tangente au point T d'abscisse $x = 1$ de la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ si

$$y = \frac{x+3}{x^2+1}$$

CORRIGÉ

Exercice 1 :

a) $f(x) = (4x^3 - x^2 + 5x - 1)^4$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(4x^3 - x^2 + 5x - 1)^3 (4x^3 - x^2 + 5x - 1)'$$

$$= 4(4x^3 - x^2 + 5x - 1)^3 (12x^2 - 2x + 5)$$

b) $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(2x+7)^4}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(x-5)^2 \cdot 1 \cdot (2x+7)^4 - (x-5)^3 \cdot 4(2x+7)^3 \cdot 2}{(2x+7)^8}$$

$$= \frac{3(2x+7)^4 (x-5)^2 - 8(2x+7)^3 \cdot (x-5)^3}{(2x+7)^8}$$

$$= \frac{(2x+7)^3 (x-5)^2 \left(3(2x+7) - 8(x-5)\right)}{(2x+7)^8}$$

$$= \frac{(x-5)^2 (6x + 21 - 8x + 40)}{(2x+7)^5} = \frac{(x-5)^2 (-2x + 61)}{(2x+7)^5}$$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x-4}}{(3x+8)^3} = \dfrac{(9x-4)^{1/2}}{(3x+8)^3}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\frac{1}{2}(9x-4)^{-\frac{1}{2}}(9) \cdot (3x+8)^3 - (9x-4)^{1/2} \cdot 3(3x+8)^2 \cdot 3}{(3x+8)^6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\dfrac{9(3x+8)^3}{2\sqrt{9x-4}} - 9(3x+8)^2\sqrt{9x-4}}{(3x+8)^6}$$

$$= \frac{9\cancel{(3x+8)}^3}{\left(2\sqrt{9x-4}\right)\cancel{(3x+8)}^6} - \frac{9\cancel{(3x+8)}^2\sqrt{9x-4}}{\cancel{(3x+8)}^6}$$

$$= \frac{9}{2\sqrt{9x-4}\cdot(3x+8)^3} - \frac{9\sqrt{9x-4}}{(3x+8)^4}$$

$$= \frac{9(3x+8) - 9\cdot 2(9x-4)}{2\sqrt{9x-4}\cdot(3x+8)^4} = \frac{27x+72-162x+72}{2(3x+8)^4\sqrt{9x-4}}$$

$$f'(x) = \frac{-135x+144}{2(3x+8)^4\sqrt{9x-4}} = \frac{9}{2}\,\frac{(-15x+16)}{\sqrt{9x-4}\cdot(3x+8)^4}$$

ou $f(x) = (9x-4)^{\frac{1}{2}}(3x+8)^{-3}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(9x-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 9\cdot(3x+8)^{-3} + (9x-4)^{\frac{1}{2}}(-3)(3x+8)^{-4}\cdot(3) = \ldots$

d) $f(x) = (4x+6)^4(2x-5)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(4x+6)^3\cdot 4\cdot(2x-5)^3 + (4x+6)^4\cdot 3(2x-5)^2\cdot 2$$

$$= 16(4x+6)^3(2x-5)^3 + 6(4x+6)^4(2x-5)^2$$

$$= 2(4x+6)^3\cdot(2x-5)^2\left(8(2x-5) + 3(4x+6)\right)$$

$$= 2(4x+6)^3\cdot(2x-5)^2(16x-40+12x+18)$$

$$= 2(4x+6)^3\cdot(2x-5)^2(28x-22) = 2(4x+6)^3(2x-5)^2\cdot 2(14x-11)$$

$$= 2\left(2^3(2x+3)^3\right)\cdot(2x-5)^2\cdot 2(14x-11)$$

$$= 2\cdot 2^3\cdot 2\,(2x+3)^3\cdot(2x-5)^2\cdot(14x-11)$$

$$= \underline{32\,(2x+3)^3\cdot(2x-5)^2\cdot(14x-11)}$$

e) $f(x) = \sin^4\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = 4\sin^3\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)'$$

$$= 4\sin^3\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}\right)$$

$$= 4\sin^3\left(\frac{x}{x+2}\right)\cos\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = 8\cdot\frac{\sin^4\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+2}\right)}{(x+2)^2}}$$

f) $f(x) = \left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 3\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)' \quad (*)$$

d'où $\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1(\sqrt{x}) - (x-5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x} - (x-5)}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{2x - x + 5}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+5}{2x\sqrt{x}}$$

f) ⇒ $f'(x) = 3\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \frac{x+5}{2x\sqrt{x}} = 3 \cdot \frac{(x-5)^2(x+5)}{2x^2\sqrt{x}}$

g) $f(x) = \sin\left(\cos(\pi x)\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos\left(\cos(\pi x)\right) \cdot \left(-\sin(\pi x)\right) \cdot \pi$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\pi \sin(\pi x) \cdot \cos\left(\cos(\pi x)\right)$$

h) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin^2(x) - \cos(x) \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x)}{\sin^4(x)}$$

$$= \frac{-\sin^3(x) - 2\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^4(x)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin(x)}\left(-\sin^2(x) - 2\cos^2(x)\right)}{\sin^{\cancel{4}}(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

Exercice 2 :

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

a) condition : $x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

$\Rightarrow ED_f = [-3 ; +\infty[$

b) $f(x) = (x+3)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$ED_{f'} =]-3 ; +\infty[$

c) tangente $(T) \parallel y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ La pente de la tangente $= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

Le point sur la courbe : $T(-2 ; 1)$

$\Rightarrow (T) : y = \frac{1}{2}x + h \Rightarrow T \in (T) \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(-2) + h$

$\Rightarrow 1 = -1 + h \Rightarrow h = 2$

Donc $\boxed{(T) : y = \frac{1}{2}x + 2}$

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \qquad ED_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1\,(x^2+1) - (x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow ED_{f'} = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ (T) au point d'abscisse $x = 1$:

$$(T) : \; y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$$

d'où $f(1) = \dfrac{1+3}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

et $f'(1) = \dfrac{-1^2-6\cdot 1+1}{(1^2+1)^2} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow (T) : \; y - 2 = -\frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(T) : \; y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}}$$